Eksamen i TMA4190 Mangfoldigheter
fredag 30 mai, 2014

LØYSINGSFORSLAG

Oppgåve 1 Vi definerer funksjonane $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ og $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ved å sette

$$\begin{aligned} F &: (x, y, z, w) \to (u, v) = (xy, zw) \\ G &: (u, v) \to (u, u^2, v, v^2) \end{aligned}$$

(a) Bestem mengda av alle regulære verdiar og mengda av alle regulære punkt til F.

Vi ser på Jacobi matrisa til F :

$$DF = \begin{pmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & y \end{pmatrix}$$

Rangen til denne i eit punkt $p = (x, y, z, w)$ er lett å bestemme. For at $q = (u, v)$ skal vere ein regulær verdi, må matrisa ha (maksimal) rang 2 i alle punkt p slik at $F(p) = q$. Generelt er p regulært punkt hvis rangen er lik 2.

regulært punkt p : x eller y $\neq 0$ og y eller $z \neq 0$.

regulær verdi $q = (u, v) : u \neq 0$ og $v \neq 0$

(b) Grunngi kvifor $M = F^{-1}(1, 1)$ er ein undermangfoldighet av $\mathbb{R}^4$. Ved å sjå nøyare på F vis også at M har 4 samanhengskomponentar, og alle er diffeomorfe med $\mathbb{R}^2$.

$q = (1, 1)$ er ein regulær verdi for F, og difior er $F^{-1}(1, 1)$ ein undermangfoldighet av $\mathbb{R}^4$ av dimensjon $4 - 2 = 2$. Her bruker vi berre resultatet til ei kjent setning.

Men M er gitt ved at $xy = 1$ og $zw = 1$. Sjå på dekomposisjonen $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, produktet av xy planet og zw-planet. Likninga $xy = 1$ representerer ein hyperbel i xy-planet, og denne har to greiner. Begge greinene er bildet av ei imbedding av $\mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}^2$, og produktet av ei hyperbelgrein i xy-planet med ei hyperbelgrein i zw-planet gir ei imbedding av $\mathbb{R}^2$ inn i $\mathbb{R}^4$. M har 4 slike komponentar, og alle er produkt av to hyperbelgreiner, følgeleg er M ein undermangfoldighet av $\mathbb{R}^4$ som har 4 samanhengskomponentar, og alle er diffeomorfe med $\mathbb{R}^2$.

(c) La $N \subset \mathbb{R}^4$ vere bildet til G. Vis at N er ei imbedding av $\mathbb{R}^2$, og at komposisjonen $F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er ein glatt homeomorfi som ikkje er ein diffeomorfi?

Det er opplagt at N er grafen til ein glatt funksjon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (u^2, v^2)$. Ved å bytte om to av koordinataksane i $\mathbb{R}^4$, så kunne vi f.eks omskrive G til funksjonen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ gitt ved $(u,v) \to (u,v,u^2,v^2)$, så ser vi at N er grafen til ein funksjon på $\mathbb{R}^2$. Generelt er grafen til ein funksjon på $\mathbb{R}^2$ inn i $\mathbb{R}^2$ ein undermangfoldig av produktrommet $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, altså har vi ei imbedding av $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^4$, og bildet av imbeddinga er nettopp N.

Komposisjonen $F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er den glatte funksjonen $(u,v) \to (u^3, v^3)$, som har kontinuerleg invers $(u,v) \to (\sqrt[3]{u}, \sqrt[3]{v})$. Men denne er ikkje glatt omkring origo $(0,0)$, så den inverse er ikkje glatt og difor er ikkje $F \circ G$ ein diffeomorfi.

(d) Vis at M og N er "transversale" i $\mathbb{R}^4$, det vil seie at for kvart skjeringspunkt $p \in M \cap N$, hvis slike finst, så vil tangentromma T_pM og T_pN spenne ut heile $T_p\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$.

Hvis p er eit felles punkt for N og M, så må $p = (u, u^2, v, v^2) = (x, y, z, w)$, $xy = zw = 1$, altså $u^3 = 1, v^3 = 1$, dvs. $u = v = 1$ og difor $p = (1,1,1,1)$. For å finne tangentplanet til M i p, la oss finne to kurver på M gjennom p som har hastighetsvektorar som utspenner planet.

La $\gamma_1(t) = (t, 1/t, 1, 1), \gamma_2(t) = (1, 1, t, 1/t)$. Merk at $xy = zw = 1$ for alle t, så kurvene ligg på M. For $t = 1$ passerer kurvene gjennom p og har hastighetsvektorar

$$\frac{d}{dt}|_{t=1}\gamma_1(t) = (1,-1,0,0), \ \ \frac{d}{dt}|_{t=1}\gamma_2(t) = (0,0,1,-1)$$

På same måte, la $\omega_1(u) = (u, u^2, 1, 1)$, $\omega_2(v) = (1, 1, v, v^2)$, og observer at

$$\frac{d}{du}|_{u=1}\omega_1(u) = (1,2,0,0), \ \ \frac{d}{dv}|_{v=1}\omega_2(u) = (0,0,1,2)$$

er to tangentvektorar til N som utspenner tangentplanet i p. Det er opplagt at alle 4 vektorane er lineært uavhengige og utspenner heile $T_p\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$.

Oppgåve 2 La $M(2)$ vere vektorrommet av alle reelle 2×2-matriser og $GL(2)$ delmenga av invertible matriser. Definer eksponentialfunksjonen $Exp : M(2) \to M(2)$ ved følgande rekkje

$$Exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 + ...$$

Vi tek det som kjent at rekkja konvergerer for alle A og at funksjonen er analytisk (difor også C^∞-glatt).

(a) Grunngi kvifor $GL(2)$ er ei open delmengde i $M(2)$, og at bildet til Exp er i $GL(2)$.

Hvis vi ser på determinant funksjonen

$$\det : M(2) \to \mathbb{R},$$

så er denne kontinuerleg (og også glatt), slik at det inverse bilde $\det^{-1}(0)$ er ei lukka mengde i $M(2) \simeq \mathbb{R}^4$,og komplementet er nettopp $GL(2)$, og er altså ei open delmengde.

(b) Vis, ved å referere til ei kjend setning, at $Exp : M(2) \to GL(2)$ er ein lokal diffeomorfi nær null-matrisa 0, eller meir presist, det finst ei open omegn om 0 som Exp avbildar diffeomorft på ei open omegn om identitetsmatrisa I. (Hint: bestem tangentavbildninga $D(Exp)_0 : M(2) \to M(2)$, der vi som vanleg identifiserer tangentromma med $M(2)$ sjølv.)

Vi viser til det inverse funksjonsteorem, som seier at hvis ein glatt funksjon $F : M \to N$ mellom to mangfoldigheter av same dimensjon har differensial

$$DF|_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

i eit punktet p av maksimal rang, dvs. lineæravbildninga $DF|_p$ er invertibel, så er F ein lokal diffeomorfi i ei omegn omkring p. La oss difor rekne ut lineæravbildninga

$$D(\exp)|_0 : T_0M(2) = M(2) \to T_IGL(2) = M(2)$$

La $A \in M(2)$ vere ein vilkårleg tangentvektor i $T_0M(2)$. La $\gamma(t)$ vere ei glatt kurve i $M(2)$ slik at $\gamma(0) = 0$ og $\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \gamma(t) = A$. Då er

$$D(\exp)|_0(A) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(\gamma(t))$$

Vi kan velje kurva $\gamma(t)$ slik vi vil, så lenge den har hastighetsvektor A i origo. Det er enklast å velje $\gamma(t) = tA$, og då finn vi at

$$D(\exp)|_0(A) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tA}) = A$$

Dette viser at $D(\exp)|_0$ er faktisk lik identitetsavbildninga på $M(2)$, spesielt er den invertibel.

Oppgåve 3 La C vere ei kurve i eit vertikalt plan gjennom z-aksen. Ved å rotere C omkring z-aksen får vi ei rotasjonsflate $\Gamma = \Gamma_C$ i $\mathbb{R}^3$, der $\mathbb{R}^3$ er det euklidske 3-rom med den vanlege metrikken $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Vi set

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ og tenkjer oss C som ei glatt og regulær kurve i (r,z)-planet, og (for å gjere det enkelt) parametrisert ved si bogelengd t,

$$C : r = r(t), z = h(t), \quad r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$$

(a) La θ vere rotasjonsvinkelen, og so skriv opp uttrykka for parametriseringa av flata

$$\Gamma : (t,\theta) \to (x,y,z).$$

Vis at uttrykt ved koordinatane (t,θ) så er den induserte Riemannske metrikken $d\sigma^2$ på Γ gitt ved

$$d\sigma^2 = ds^2|_\Gamma = dt^2 + r(t)^2 d\theta^2,$$

og skriv også opp matrisa til indreproduktet på tangentplanet $T_p\Gamma$ med omsyn på basisen $\{\partial/\partial t, \partial/\partial\theta\}_p$.

Vi kan oppfatte (r,θ) som polarkoordinatar i xy-planet, og θ er også rotasjonsvinkelen om z-aksen (som jo står vinkelrett på xy-planet). Det gir parametriseringa av rotasjonsflata

$$(t,\theta) \to (x,y,z) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

I $\mathbb{R}^3$ skal vi altså restriktere den Euklidske metrikken $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ til rotasjonsflata Γ, slik at på flata er $x = r(t)\cos\theta,\ y = r(t)\sin\theta, z = h(t)$, følgeleg

$$\begin{aligned} dx &= r'(t)\cos\theta dt - r(t)\sin\theta d\theta \\ dy &= r'(t)\sin\theta dt + r(t)\cos\theta d\theta \\ dz &= h'(t)dt, \end{aligned}$$

som ved innsetting i uttrykket for ds^2 gir

$$\begin{aligned} ds^2|_\Gamma &= (r'(t)\cos\theta dt - r(t)\sin\theta d\theta)^2 + \\ &\quad (r'(t)\sin\theta dt + r(t)\cos\theta d\theta)^2 + h'(t)^2 dt^2 \\ &= dt^2 + r(t)^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

når vi bruker at $r\prime(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ (pr. antakelse).

Vi ser på (t,θ) som eit (globalt) kart på flata Γ, slik at tangentplanet til flata i punktet p svarande til (t,θ) har basis $\frac{\partial}{\partial t}|_p, \frac{\partial}{\partial\theta}|_p$. Uttrykket for $ds^2|_\Gamma$ gir oss (pr. def.) indreproduktet til tangentplanet i p, og matrisa til indreproduktet med omsyn til denne basis

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

..

(b) La $f(t, \theta)$ vere ein glatt funksjon på flata Γ. Gradienten til f er vektorfeltet $\nabla f = A\partial/\partial t + B\partial/\partial\theta$ på Γ som er slik at

$$< \nabla f(p), v >_p = v(f)$$

for alle $v \in T_p\Gamma$, $p \in \Gamma$. Bestem ∇f.

Alle vektorfelt kan skrivast på forma $A\partial/\partial t + B\partial/\partial\theta$, så det gjeld å bestemme funksjonane $A(t, \theta)$ og $B(t, \theta)$ som svarer til gradient vektorfeltet. La $v = a\partial/\partial t + b\partial/\partial\theta$ vere ein vilkårleg tangentvektor i p. Då er

$$\begin{aligned} < & \nabla f(p), v >_p = Aa + Bbr(t)^2 \\ = & \quad v(f) = a\frac{\partial f}{\partial t} + b\frac{\partial f}{\partial\theta} \end{aligned}$$

og dette må gjelde for alle a, b, difor

$$A = \frac{\partial f}{\partial t}, \ Br^2 = \frac{\partial f}{\partial\theta}$$

Dette gir

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t}\partial/\partial t + \frac{1}{r(t)^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\partial/\partial\theta$$

(c) Den induserte metrikken til sfæren $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $\mathbb{R}^3$ kan finnast som ovanfor, ved rotasjon av ei passande kurve. Beskriv denne metrikken i passande koordinatar på S^2.

Alternativt kan ein finne metrikken på S^2 ved først å uttrykke metrikken ds^2 på $\mathbb{R}^3$ i sfæriske koordinatar (ρ, φ, θ), og deretter sette $\rho = 1$ (og difor også $d\rho = 0$).

For sfæriske koordinatar (ρ, φ, θ) i $\mathbb{R}^3$ er

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, y = \rho \sin\varphi \sin\theta, z = \cos\varphi$$

Her kan vi straks sette $\rho = 1$ og dermed få ei parametrisering av sfæren $S^2 = (\rho = 1)$:

$$(\varphi, \theta) \to (x, y, z) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

Dermed blir $dx = \cos\varphi \cos\theta d\varphi - \sin\varphi \sin\theta d\theta$, osv., og ved innsetting i uttrykket $dx^2 + dy^2 + dz^2$ får vi ved enkel (men tolmodig) utrekning

$$ds^2|_{S^2} = d\varphi^2 + \sin^2(\varphi)d\theta^2$$

Alternativt kan vi oppfatte sfæren som ei rotasjonsflate, ved å rotere halvsirkelen i xz-planet mellom nordpol $\mathbf{n} = (0, 0, 1) = (\varphi = 0)$ og sydpol $\mathbf{s} = (0, 0, -1) = (\varphi = \pi)$.Med notasjonen brukt i (a) for rotasjonsflater kan vi sette $t = \varphi$, og

$h(\varphi) = \cos\varphi, r(\varphi) = \sin\varphi$. Det gir oss igjen den sfæriske metrikken $ds^2|_{S^2}$ som vi fann ovanfor.

Oppgåve 4 Vi ser på vektorfelt $X = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y$ i det euklidske xy-plan $\mathbb{R}^2$, dei tilhøyrande 1-parameter grupper $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ og integralkurver $t \to \varphi_t(p_0)$. Ved eliminasjon av t kan ein (i dei enklaste tilfelle) beskrive integralkurvene (implisitt) som ein kurvefamilie $\Phi(x, y) = c$ (konstant), for ein passande reell funksjon Φ på $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestem 1-parameter gruppene $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ og $\{\psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ generert høvesvis av vektorfelta

$$X = 2x\partial/\partial x - 3y\partial/\partial y, \quad Y = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y,$$

og bestem dei tilhøyrande kurvefamiliar $\Phi(x, y) = c$ og $\Psi(x, y) = c$.

Vektorfeltet X svarer til det dynamiske systemet

$$\frac{dx}{dt} = 2x, \quad \frac{dy}{dt} = -3y$$

med løysingar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

der $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Den assosierte 1-parameter gruppe $\{\varphi_t\}$ er lineær, nemleg gitt ved dei lineære transformasjonar i xy-planet

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Det dynamiske system svarande til Y er

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

som kan skrivast som $x'' + x = 0$, osv. Vi får

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

slik at 1-parameter gruppa er gruppa $\{\psi_t\}$ av rotasjonar i xy-planet

$$\psi_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

I det første tilfelle har vi $x = e^{2t}x_0, y = e^{-3t}y_0$, slik at

$$x^3y^2 = x_0^3y_0^2$$

er konstant. Vi set $\Phi(x,y) = x^3y^2$.

I det andre tilfelle finn vi at $x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2$ er konstant, og vi set $\Psi(x,y) = x^2+y^2$.

(b) La $\nabla\Phi$ vere gradient vektorfeltet til funksjonen Φ. Verifiser at $\nabla\Phi$ og X er ortogonale, dvs. $(\nabla\Phi)_p \perp X_p$ i kvart punkt p, og sameleis med $\nabla\Psi$ og Y. Gjeld dette generelt, nemleg for kvart vektorfelt og tilhøyrande gradient vektorfelt (som beskrive ovanfor)?

Her er $\nabla\Phi = 3x^2y^2\frac{\partial}{\partial x} + 2x^3y\frac{\partial}{\partial y}$ (pga Euklidsk metrikk i planet), og kalkulasjon av indreprodukt er som vanleg, slik at

$$< \nabla\Phi, X >= 3x^2y^2(2x) + 2x^3y(-3y) = 0$$

På same måte, $\nabla\Psi = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$, og

$$< \nabla\Psi, Y >= 2x(-y) + 2y(x) = 0.$$

Dette gjeld meir generelt for eit vektorfelt Z med assosiert kurvefamilie $\Omega(x,y)$ og gradientfelt $\nabla\Omega$. La nemleg $\gamma(t) = x(t), y(t))$ vere ei integralkurve for Z, slik at

$$\gamma'(t) = Z_{\gamma(t)}$$

Langs kurva $\gamma(t)$ er $\Omega(x,y)$ konstant, slik at

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\Omega(\gamma(t)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial y}y'(t) \\ &= < \nabla\Omega, \gamma'(t) >=< \nabla\Omega, Z > \end{aligned}$$

(c) Bestem vektorfeltet H generert av 1-parameter gruppa $\{\mu_t\}$ av "hyperbolske rotasjonar"

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \cosh 5t & \sinh 5t \\ \sinh 5t & \cosh 5t \end{pmatrix}$$

Vis at kommutator produktet (Lie bracket) $[X,Y]$ til vektorfelta i (a) er det same som H.

$H(x,y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mu_t(x,y) =$

$\frac{d}{dt}|_{t=0}\begin{pmatrix} \cosh 5t & \sinh 5t \\ \sinh 5t & \cosh 5t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ 5x \end{pmatrix}$

Altså er $H = 5y\frac{\partial}{\partial x} + 5x\frac{\partial}{\partial y}$.

Vi reknar ut kommutatorprodukt $[A,B] = AB - BA$, slik at

$$\begin{aligned} [X,Y] &= [2x\partial/\partial x - 3y\partial/\partial y, -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y] \\ &= -2[x\partial/\partial x, y\partial/\partial x] + 2[x\partial/\partial x, x\partial/\partial y] \\ &\quad +3[y\partial/\partial y, y\partial/\partial x] - 3[y\partial/\partial y, x\partial/\partial y] \end{aligned}$$

Hugs at $[\partial/\partial x, \partial/\partial y] = 0$ osv.......,

$$\begin{aligned}
[x\partial/\partial x, y\partial/\partial x] &= x\partial/\partial x(y\partial/\partial x) - y\partial/\partial x(x\partial/\partial x) = 0 - y\partial/\partial x \\
[x\partial/\partial x, x\partial/\partial y] &= x\partial/\partial y,\ [y\partial/\partial y, y\partial/\partial x] = y\partial/\partial x \\
[y\partial/\partial y, x\partial/\partial y] &= -x\partial/\partial y
\end{aligned}$$

Difor er

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= (-2)(-y\partial/\partial x) + 2x\partial/\partial y + 3y\partial/\partial x + (-3)(-x\partial/\partial y) \\
&= 5y\partial/\partial x + 5x\partial/\partial y = H
\end{aligned}$$

SLUTT