Eksamensoppgave i TMA4190 Mangfoldigheter
fredag 30 mai, 2014

Oppgave 1 Vi definerer funksjonene $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ og $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ved å sette

$$\begin{aligned} F &: (x, y, z, w) \to (u, v) = (xy, zw) \\ G &: (u, v) \to (u, u^2, v, v^2) \end{aligned}$$

(a) Bestem mengda av alle regulære verdier og mengda av alle regulære punkter til F.

(b) Begrunn hvorfor $M = F^{-1}(1, 1)$ er en undermangfoldighet av $\mathbb{R}^4$. Ved å se nøyere på F vis også at M har 4 sammenhengskomponenter, og alle er diffeomorfe med $\mathbb{R}^2$.

(c) La $N \subset \mathbb{R}^4$ være bildet til G. Vis at N er en imbedding av $\mathbb{R}^2$, og at komposisjonen $F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en glatt homeomorfi som ikke er en diffeomorfi?

(d) Vis at M og N er "transversale" i $\mathbb{R}^4$, det vil si at for hvert skjæringspunkt $p \in M \cap N$, hvis slike finnes, så vil tangentrommene T_pM og T_pN utspenne hele $T_p\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$.

Oppgave 2 La $M(2)$ betegne vektorrommet av alle reelle 2×2-matriser og $GL(2)$ delmenga av invertible matriser. Definer eksponentialfunksjonen $Exp : M(2) \to M(2)$ ved følgende rekke

$$Exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 + ...$$

Det antas kjent at rekka konvergerer for alle A og at funksjonen er analytisk (følgelig også C^∞-glatt).

(a) Begrunn hvorfor $GL(2)$ er en åpen delmengde i $M(2)$, og at bildet til Exp er i $GL(2)$.

(b) Vis, ved henvisning til en kjent setning, at $Exp : M(2) \to GL(2)$ er en lokal diffeomorfi nær null-matrisa 0, eller mer presist, det finnes en åpen omegn om 0 som Exp avbilder diffeomorft på en åpen omegn om identitetsmatrisa I. (Hint: bestem tangentavbildningen $D(Exp)_0 : M(2) \to M(2)$, hvor vi som vanlig identifiserer tangentrommene med $M(2)$ selv.)

Eksamensoppgave i TMA4190 Mangfoldigheter
fredag 30 mai, 2014

Oppgave 3 La C være en kurve i et vertikalt plan gjennom z-aksen. Ved å rotere C omkring z-aksen får vi en rotasjonsflate $\Gamma = \Gamma_C$ i $\mathbb{R}^3$, hvor $\mathbb{R}^3$ er det euklidske 3-rom med den vanlige metrikken $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Vi setter $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og tenker oss C som en glatt og regulær kurve i (r, z)-planet, og (for enkelhets skyld) parametrisert ved sin buelengde t,

$$C : r = r(t), z = h(t), \quad r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$$

(a) La θ være rotasjonsvinkelen, og skriv opp uttrykkene for parametriseringen av flata

$$\Gamma : (t, \theta) \to (x, y, z).$$

Vis at uttrykt ved koordinatene (t, θ) så er den induserte Riemannske metrikken $d\sigma^2$ på Γ gitt ved

$$d\sigma^2 = ds^2|_\Gamma = dt^2 + r(t)^2 d\theta^2,$$

og skriv også opp matrisa til indreproduktet på tangentplanet $T_p\Gamma$ med hensyn på basisen $\{\partial/\partial t, \partial/\partial\theta\}_p$.

(b) La $f(t, \theta)$ være en glatt funksjon på flata Γ. Gradienten til f er vektorfeltet $\nabla f = A\partial/\partial t + B\partial/\partial\theta$ på Γ som er slik at

$$< \nabla f(p), v >_p = v(f)$$

for alle $v \in T_p\Gamma$, $p \in \Gamma$. Bestem ∇f.

(c) Den induserte metrikken til sfæren $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $\mathbb{R}^3$ kan bestemmes som ovenfor, ved rotasjon av en passende kurve. Beskriv denne metrikken i passende koordinater på S^2.

Alternativt kan en finne metrikken på S^2 ved først å uttrykke metrikken ds^2 på $\mathbb{R}^3$ i sfæriske koordinater (ρ, φ, θ), og deretter sette $\rho = 1$ (og følgelig også $d\rho = 0$).

Eksamensoppgave i TMA4190 Mangfoldigheter
fredag 30 mai, 2014

Oppgave 4 Vi ser på vektorfelter $X = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y$ i det euklidske xy-plan $\mathbb{R}^2$, de tilhørende 1-parameter grupper $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ og integralkurver $t \to \varphi_t(p_0)$. Ved eliminasjon av t kan en (i de enkleste tilfeller) beskrive integralkurvene (implisitt) som en kurvefamilie $\Phi(x, y) = c$ (konstant), for en passende reell funksjon Φ på $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestem 1-parameter gruppene $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ og $\{\psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ generert henholdsvis av vektorfeltene

$$X = 2x\partial/\partial x - 3y\partial/\partial y, \quad Y = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y,$$

og bestem de tilhørende kurvefamilier $\Phi(x, y) = c$ og $\Psi(x, y) = c$.

(b) La $\nabla\Phi$ betegne gradient vektorfeltet til funksjonen Φ. Verifiser at $\nabla\Phi$ og X er ortogonale, dvs. $(\nabla\Phi)_p \perp X_p$ i hvert punkt p, og likeledes med $\nabla\Psi$ og Y. Gjelder dette generelt, nemlig for hvert vektorfelt og tilhørende gradient vektorfelt (som beskrevet ovenfor)?

(c) Bestem vektorfeltet H generert av 1-parameter gruppa $\{\mu_t\}$ av "hyperbolske rotasjoner"

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \cosh 5t & \sinh 5t \\ \sinh 5t & \cosh 5t \end{pmatrix}$$

Vis at kommutator produktet (Lie bracket) $[X, Y]$ til vektorfeltene i (a) er det samme som H.