NORGES TEKNISK-NATURVITENSKPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen: Berit Stensønes
(968-54-060)

Eksamen i TMA4175, KOMPLEKS ANALYSE
Dato: Onsdag 7. August, 2013

Oppgave 1

Anta at f er analytisk i $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ og $f(z) = 1$ når $z = x + i0$ og $-1/2 \leq x \leq 1/2$. Hva er verdien av $f(1/2 + i/2)$? Begrunn svaret.

Oppgave 2

Forklar hvorfor det ikke finnes en ikke konstant analytisk avbildning fra $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ inn i $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Oppgave 3

Beregn

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

Vis alle estimatene.

Oppgave 4

Hvor mange nullpunkter har $g(z) = 20z^8 + e^z + z^2$ i enhetsdisken?

Faglig kontakt under eksamen: Berit Stensønes
(968-54-060)

Eksamen i TMA4175 Kompleks Analyse
Dato: Tirsdag 28. Mai, 2013
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kode A.
Sensur: 18. Juni 2013

Problem 1

Let f be an entire function and assume that $|f(z)| \leq |z|^{10}$ for all $z \in \mathbb{C}$.

a) Prove that $f^{(n)}(0) = 0$ for all $n \geq 11$.

b) Show that f is a polynomial of degree less than or equal to 10.

Problem 2

Let $p(z) = z^3 + 3z^2 + 17z + 50$. Show that p has at least one zero in $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 10.\}$

Problem 3

Let $\gamma(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Find

$$\int_\gamma \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^4 + 3 + 3i}\right) dz$$

(Do not try to simplify the answer.)

Problem 4

Find

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

(Show all estimates)

Problem 5

Find a conformal map from $D = \{z \in \mathbb{C}; -1 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ to the unit disc.

Problem 6

Assume that f is analytic on the unit disc, $|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$. Show that $|f(z)| \leq |z|^2$ for all z in the unit disc and if $|f(z_0)| = |z_0|^2$ for some $0 < |z_0| < 1$, then $f(z) = e^{i\theta} z^2$.

Problem 7

True or false? Give a short explanation.

a) Let $u(x, y) = x^3 - 2xy$. Can we find a function v such that $u + iv$ is analytic in $\mathbb{C}$?

b) Let $D = \mathbb{C} \setminus \gamma$, where $\gamma(t) = (t, t^2), 0 \leq t < \infty$. Does there exist a non constant bounded analytic function on D?

c) Can we find a non constant analytic function f in the unit disc such that $f(1/n) = 0, n = 2, 3, 4, \ldots$

d) Let $u(e^{it}) = |\cos t|$ when $0 \leq t \leq 2\pi$. Is it possible to find a harmonic function $\hat{u}$ on the unit disc, continuous on the closed disc, such that $\hat{u}(e^{it}) = u(e^{it})$?

Faglig kontakt under eksamen: Berit Stensønes
(968-54-060)

Eksamen i TMA4175 Kompleks Analyse
Dato: Tirsdag 28. Mai, 2013
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kode A.
Sensur: 18. Juni 2013

Oppgave 1
La f være en hel funksjon og anta at $|f(z)| \leq |z|^{10}$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
a) Bevis at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 11$.
b) Vis at f er et polynom av grad mindre eller lik 10.

Oppgave 2
La $p(z) = z^3 + 3z^2 + 17z + 50$. Vis at p har minst ett nullpunkt i $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 10.\}$

Oppgave 3
La $\gamma(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Finn

$$\int_\gamma \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^4 + 3 + 3i}\right) dz$$

(Ikke prøv å forenkle svaret.)

Oppgave 4
Finn

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

(Vis alle estimater)

Oppgave 5
Finn en konform avbildning fra $D = \{z \in \mathbb{C}; -1 < \text{Re}(z) < 1\}$ til enhetsdisken.

Oppgave 6
Anta at f er analytisk i enhetsdisken, $|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$ og $f'(0) = 0$. Vis at $|f(z)| \leq |z|^2$ for alle z i enhetsdisken og hvis $|f(z_0)| = |z_0|^2$ for en $0 < |z_0| < 1$, da er $f(z) = e^{i\theta} z^2$.

Oppgave 7
Rett eller galt? Gi en kort forklaring.
a) La $u(x, y) = x^3 - 2xy$. Fins en funksjon v slik at $u + iv$ er analytisk i $\mathbb{C}$?
b) La $D = \mathbb{C} \setminus \gamma$, hvor $\gamma(t) = (t, t^2), 0 \leq t < \infty$. Fins det en begrenset ikke konstant analytisk funksjon på D?
c) Fins en ikke konstant analytisk funksjon f på enhetsdisken slik at $f(1/n) = 0, n = 2, 3, 4, \ldots$
d) La $u(e^{it}) = |\cos t|$ når $0 \leq t \leq 2\pi$. Fins det en harmonisk funksjon $\hat{u}$ på enhetsdisken, kontinuerlig på den lukkede disken, slik at $\hat{u}(e^{it}) = u(e^{it})$?

Fagleg kontakt under eksamen: Berit Stensønes
(968-54-060)

Eksamen i TMA4175 Kompleks Analyse
Dato: Tirsdag 28. Mai, 2013
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kode A.
Sensur: 18. Juni 2013

Oppgåve 1

La f være en heil funksjon og anta at $|f(z)| \leq |z|^{10}$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Bevis at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 11$.

b) Vis at f er eit polynom av grad mindre eller lik 10.

Oppgåve 2

La $p(z) = z^3 + 3z^2 + 17z + 50$. Vis at p har minst eit nullpunkt i $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 10.\}$

Oppgåve 3

La $\gamma(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Finn

$$\int_\gamma \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^4 + 3 + 3i}\right) dz$$

(Ikkje prøv å forenkle svaret.)

Oppgåve 4

Finn

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

(Vis alle estimat)

Oppgåve 5

Finn ei konform avbildning fra $D = \{z \in \mathbb{C}; -1 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ til einingsdisken.

Oppgåve 6

Anta at f er analytisk i einingsdisken, $|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$ og $f'(0) = 0$. Vis at $|f(z)| \leq |z|^2$ for alle z i einingsdisken og dersom $|f(z_0)| = |z_0|^2$ for ein $0 < |z_0| < 1$, då er $f(z) = e^{i\theta} z^2$.

Oppgåve 7

Rett eller gale? Gje ei kort forklaring.

a) La $u(x, y) = x^3 - 2xy$. Fins en funksjon v slik at $u + iv$ er analytisk i $\mathbb{C}$?

b) La $D = \mathbb{C} \setminus \gamma$, der $\gamma(t) = (t, t^2), 0 \leq t < \infty$. Fins det ein avgrensa ikkje konstant analytisk funksjon på D?

c) Fins det ein ikkje konstant analytisk funksjon f på einingsdisken slik at $f(1/n) = 0, n = 2, 3, 4, \ldots$

d) La $u(e^{it}) = |\cos t|$ når $0 \leq t \leq 2\pi$. Fins det ein harmonisk funksjon $\hat{u}$ på einingsdisken, kontinuerleg på den lukka disken, slik at $\hat{u}(e^{it}) = u(e^{it})$?

Norwegian University of Science and Technology
Department of Mathematical Sciences

Contact during exam:
Yurii Lyubarskii (91 64 73 62)

Complex Analysis (TMA4175)

2012 May 29
Time: 09:00 – 13:00

Allowed materials:
One A5 yellow sheet stamped by the department with students notes. Calculator HP30S

Problem 1 Find all values of $(-2+2i)^{1/3}$ and plot them.

Problem 2 For each real value of a plot the circle $\{z = x+iy; x^2+y^2 = ax\}$ and find its image under the mapping $w = 1/z$.

Problem 3 For each $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ find the residues at infinity of the function $z^n e^{1/z}$.

Problem 4 Find the integral

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{a+\cos\phi}, \quad a > 1.$$

Problem 5 Find the integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

Problem 6 Given $\alpha \in (0, 2\pi)$ find the image of the half strip $\{z = x+iy; x < 0, 0 < y < \alpha\}$ under the mapping $w = e^z$.

Problem 7 Find for which a the function $u(x, y) = x^2 + ay^2 + 2ax$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

Problem 8 Let f be an entire function such that $\mathrm{Re} f(z) > -1$, $z \in \mathbb{C}$. Prove that $f(z) = \mathrm{Const}$

Slutt

Contact during exam: Pavel Gumenyuk
Mobile: (+47) 469 50 522

Faglig kontankt under eksamen: Pavel Gumenyuk
Mobil: (+47) 469 50 522

EXAM TMA4175

Complex Analysis, May 31, 2011

9:00 – 13:00

Allowed materials:

One A5 yellow sheet stamped by the department with students' notes

Calculator HP30S

Hjelpemidler:

Et A5-ark stemplet fra instituttet med valgfri påskrift av studenten

Kalkulator HP30S

Oppgave 1 / problem 1.

Bokmål. Hva er bildet av halvstripen $D := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ ved den brudne lineær transformasjonen

$$w = f(z) := \frac{1+z}{1-z} \ ?$$

English. What is the image of the half-strip $D := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ under the linear-fractional mapping

$$w = f(z) := \frac{1+z}{1-z} \ ?$$

Oppgave 2 / problem 2.

Bokmål. La $n \neq 0$ være et heltall. Finn verdien til det følgende integralet:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\cos(2n\theta)\, d\theta.$$

Hint: Skriv integranden via $z = e^{i\theta}$, $1/z = e^{-i\theta}$.

English. Let $n \neq 0$ be an integer. Find the value of the following integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\cos(2n\theta)\, d\theta.$$

Hint: Express the integrand in terms of $z = e^{i\theta}$, $1/z = e^{-i\theta}$.

Oppgave 3 / problem 3.

Bokmål. Hvor mange nullpunkter, med ordenen tatt hensyn til, har funksjonen $f(z) := z^5 + 3z^2 + e^{z-2}$ på områdene $\{z : |z| < 1\}$ og $\{z : 1 < |z| < 2\}$?

English. How many zeros, taking into account multiplicities (orders), does the function $f(z) := z^5 + 3z^2 + e^{z-2}$ have in the domains $\{z : |z| < 1\}$ and $\{z : 1 < |z| < 2\}$?

Oppgave 4 / problem 4.

Bokmål. Anta at f er holomorf på $\{z : 1 < |z| < +\infty\}$ og at $f(n) = 2^n$ for alle $n = 2, 3, \ldots$ Hva slags singularitet har funksjonen f i ∞?

English. Assume that f is holomorphic in $\{z : 1 < |z| < +\infty\}$ and that $f(n) = 2^n$ for each $n = 2, 3, \ldots$ What kind of singularity does function f have at ∞?

Oppgave 5 / problem 5.

Bokmål. La $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Fiksér $M > 1$. La $\mathcal{S}^M$ være klassen av alle univalente holomorfe funksjoner $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ slik at $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, og $|f(z)| \leqslant M$ for alle $z \in \mathbb{D}$. Bevis at hver følge $f_n \in \mathcal{S}^M$, $n = 1, 2, \ldots$, har en delfølge f_{n_k} som konvergerer lokalt uniformt i $\mathbb{D}$ til en funksjon fra $\mathcal{S}^M$.

Hint: bruk resonnementet i beviset for Riemanns avbildningssats.

English. Denote $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Fix $M > 1$. Let $\mathcal{S}^M$ be the class of all univalent holomorphic functions $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ such that $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, and $|f(z)| \leqslant M$ for all $z \in \mathbb{D}$. Prove that any sequence $f_n \in \mathcal{S}^M$, $n = 1, 2, \ldots$, has a subsequence f_{n_k} that converges locally uniformly in $\mathbb{D}$ to a function from the class $\mathcal{S}^M$.

Hint: follow the argument in the proof of the Riemann Mapping Theorem.

Oppgave 6 / problem 6.

Bokmål. La f være en holomorf funksjon på $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Anta at $|f(z)| < M$ for alle $z \in \mathbb{D}$. Bruk Cauchys integralsformel for deriverte å vise at

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{(1 - |z|)^n} M$$

for alle $z \in \mathbb{D}$ og alle $n = 1, 2, \ldots$

English. Let f be a holomorphic function in $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Assume that $|f(z)| < M$ for all $z \in \mathbb{D}$. Using the Cauchy integral formulas for derivatives, show that

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{(1 - |z|)^n} M$$

for any $z \in \mathbb{D}$ and any $n = 1, 2, \ldots$

Oppgave 7 / problem 7.

Bokmål. La M være et positivt tall, f en holomorf funksjon på et område $D \subset \mathbb{C}$, og $z_0 \in D$. Anta at $|f(z)| \leqslant M$ for alle $z \in D$ og at $|f(z_0)| = M$. Forklar hvorfor f i dette tilfellet må være en konstant i D.

English. Let M be a positive number, f a holomorphic function in a domain $D \subset \mathbb{C}$, and $z_0 \in D$. Assume that $|f(z)| \leqslant M$ for all $z \in D$ and that $|f(z_0)| = M$. Explain why in this case f must be constant in D.

Oppgave 8 / problem 8.

Bokmål. Bevis at hver begrenset holomorf funksjon $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, er konstant.

English. Prove that any bounded holomorphic function $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, is constant.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen: Kari Hag
Mobil 48301988

TMA4175 Kompleks Analyse

Torsdag 25. mai 2010
Tid 9-13
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Et A5-ark stemplet fra Instituttet med valgfri påskrift av studenten.
Bokmål

Sensurfrist: 17. juni 2010.

Oppgave 1

La f være en analytisk (holomorf) funksjon på et område D slik at $|f(z)| = 1$ for alle i D. Forklar hvorfor f må være en konstant.

Oppgave 2 La

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Hva er bildet av $|z| < 1$ ved f?

Oppgave 3

Vis vha Liouvilles teorem at et polynom av grad større enn eller lik 1, har minst en rot.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen: Kari Hag
Mobil 48301988

TMA4175 Kompleks Analyse

Torsdag 25. mai 2010
Tid 9-13
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Et A5-ark stemplet fra Instituttet med valgfri påskrift av studenten.

Bokmål

Sensurfrist: 17. juni 2010.

Oppgave 1

La f være en analytisk (holomorf) funksjon på et område D slik at $|f(z)| = 1$ for alle i D. Forklar hvorfor f må være en konstant.

Oppgave 2 La

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Hva er bildet av $|z| < 1$ ved f?

Oppgave 3

Vis vha Liouvilles teorem at et polynom av grad større enn eller lik 1, har minst en rot.