Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen: Kari Hag
Mobil 48301988

TMA4175 Kompleks Analyse

Torsdag 25. mai 2010
Tid 9-13
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Et A5-ark stemplet fra Instituttet med valgfri påskrift av studenten.

Bokmål

Sensurfrist: 17. juni 2010.

Oppgave 1

La f være en analytisk (holomorf) funksjon på et område D slik at $|f(z)| = 1$ for alle i D. Forklar hvorfor f må være en konstant.

Oppgave 2

La

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Hva er bildet av $|z| < 1$ ved f?

Oppgave 3

Vis vha Liouvilles teorem at et polynom av grad større enn eller lik 1, har minst en rot.

Oppgave 4

a) Anta at $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$, i $0 < |z - z_0| < r$ med g analytisk i $|z - z_0| < r$. Forklar hvorfor

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$$

b) Beregn

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

(La $log\ z = log\ |z| + i\ \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Det er nok med en *kort* henvisning til hvordan ML-estimater brukes.)

Oppgave 5

Bevis argumentprinsippet

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n$$

for polynomet $P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$ der $|a_k| < R, k = 1, 2, 3, \cdots n$.

Oppgave 6

Finn en konform avbilding av det øvre halvplan på $\{w : Im\ w > 0, |Re\ w| < \pi/2\}$ slik at $g(1) = \pi/2, g(-1) = -\pi/2$ og $g(0) = 0$.

Oppgave 7

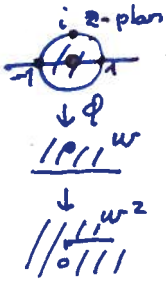
Finn en funksjon f som er analytisk i hele planet og har de enkle nullpunktene $1, 3, 3^2, 3^3, \cdots$ og ingen andre. (Det kreves en liten begrunnelse for at f er analytisk.)

Oppgave 8

Hvilket tema har du likt best i TMA4175? Gi en kort begrunnelse. (Maksimum 1/2 side.)

LØSNINGER TMA4175 vår 2010

Oppgave 1 En ikke-konstant analytisk funksjon er en åpen avbilding, dvs. $f(D)$ er en åpen mengde i planet og ikke en sirkelbue! (Andre forklaringer baserer seg på Cauchy-Riemann, Maksimum modulusprinsippet, ...)



Oppgave 2 $f(z) = \phi(z)^2 - \frac{1}{4}$ der $\phi(\mathbb{D}) = \{w : w > 0\}$ da $\phi(-1) = 0$, $\phi(1) = \infty$, $\phi(i) = i$ og $\phi(0) = 1$. (Sirkler avbildes på generaliserte sirkler.) Altså $w^2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, og $\underline{\underline{f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]}}$.

Oppgave 3 Dersom $p(z)$, grad $m \geq 1$, ikke har en rot, vil $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ være en analytisk funksjon i $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \frac{1}{z^m \left(\underset{\neq 0}{a_m} + a_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^m}\right)}$$

$f(z) \to 0$ når $z \to \infty$. Spesielt er f begrenset og må være en konstant ved Liouville. Altså $f(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Motsigelse! ($p(z) = \frac{1}{f(z)} = \infty$.) $p(z)$ må ha minst en rot.

Oppgave 4

a) $g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} + \cdots$

for $|z - z_0| < r$, og

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!\,(z - z_0)} + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \cdots$$

$\mathrm{Res}[f(z), z_0]$ er koeff. for $(z - z_0)^{-1}$ og påstanden følger.

Kommentar. Til tross for rådet "La $\log z = \log|z| + i\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$", opererte flere med nøkkelhullkurve som integrasjonsvei. Leder til $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$ som vi også får ved å ta imaginærdel i stedet for realdel i b).

b)

$$1+z^2=0 \iff z=\pm i$$

Residueteoremet gir $\displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i]$ (*)

Her er $f(z) = \dfrac{\log z}{(z^2+1)^2} = \dfrac{\log z}{(z+i)^2(z-i)^2}$ slik at

$$g(z) = \frac{\log z}{(z+i)^2},\ m=2,\ i\ (a);\quad g'(i) = \frac{\pi+2i}{8}.$$

$$\operatorname{Res}[f(z), i] = g'(i) \underset{(*)}{\Longrightarrow} \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$

Ved ML-ulikheten følger $I_R = \displaystyle\int_{\frown R} f(z)\,dz \to 0$ når $R\to\infty$.

Ser litt nærmere på $J = \displaystyle\int_{\frown\varepsilon} f(z)\,dz$ for ε tilstrekkelig liten:

$$|J| \underset{ML}{\le} \pi\varepsilon \frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\pi^2}}{(1-\varepsilon^2)^2} \le \pi\varepsilon \frac{-2\log\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \to 0 \text{ når } \varepsilon\to 0.$$

Altså har vi alt i alt

$$-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\log(-x)+i\pi}{(1+x^2)^2}\,dx + E$$

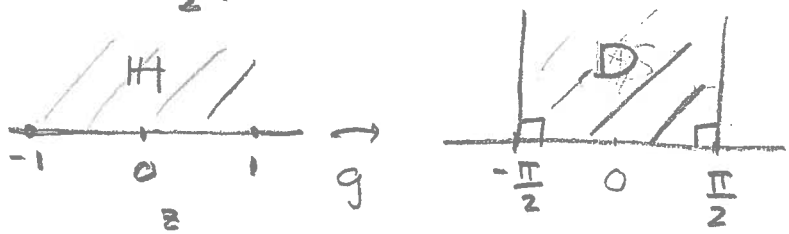
der $E \to 0$ når $\varepsilon \searrow 0$ og $R \nearrow \infty$. Tar vi realdelen på begge sider, får vi

$$-\frac{\pi}{2} = 2\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$$

Oppgave 5 $\quad \dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{z-a_k}$ da $P'(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{P(z)}{z-a_k}$, og

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n \oint_{|z|=R} dz/(z-a_k) = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

Oppgave 6 Dette er den siste øvingsoppgaven med $a = \frac{\pi}{2}$.



$$g(z) = A\int_0^z (t+1)^{-\frac{1}{2}}(t^0)(t-1)^{-\frac{1}{2}} + B \quad \text{der } \underline{B=0} \ (g(0)=0)$$

$$\left.\begin{aligned} A'\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= A'\arcsin(1) = A'\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ A'\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= A'\arcsin(-1) = -A'\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} A'=1 \text{ passer}$$

$$\underline{\underline{g(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin z}}$$

Alternativt; f.eks. $z = \sin w$ avbilder D konformt på H. Dette krever litt begrunnelse!

Oppgave 7

La $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{3^n}\right)$.

Det uendelige produktet konvergerer lokalt uniformt i $\mathbb{C}$. For $|z| \le R$ har vi nemlig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|}{3^n} \le R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = R\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}R,$$

og det uendelige produktet konvergerer uniformt på alle begrensede mengder. Da $f(z) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}\left(1-\frac{z}{3^n}\right)$ der $\prod_{n=0}^{N}\left(1-\frac{z}{3^n}\right)$ er analytiske, er f analytisk.

Per definisjon er produktet $f(z)$ lik 0 hvis og bare hvis en av faktorene er lik 0.

Framme!