Yves Meyer—vinner av Abelprisen 2017

Kristian Seip, NTNU

Perleseminar, 26. januar 2018

Abelprisen 2017

gikk til Yves Meyer for hans

"pivotal role in the development of the mathematical theory of wavelets."

Retningslinjer for Abelprisen

The Abel Prize recognizes outstanding scientific work in the field of mathematics, including mathematical aspects of computer science, mathematical physics, probability, numerical analysis and scientific computing, statistics, and also **applications of mathematics in the sciences**.

The prize is meant to recognize contributions of extraordinary depth and influence to the mathematical sciences. Such work may have resolved fundamental problems, created powerful new techniques, introduced unifying principles or opened up major new fields of research. The intent is to award prizes over the course of time in a broad range of fields within the mathematical sciences.

Årets pris i lys av retningslinjene

Prisen til Meyer kan forstås som

- den mest “anvendte” prisen siden Peter Lax i 2005
- den andre prisen innen harmonisk analyse (etter Carleson i 2006).

Priser utenfor matematikkens “kjerneområder”

- Det kan argumenteres for at det er viktig med “anvendte priser”, ikke bare for å tilfredsstille retningslinjene, men for prisens og matematikkens “image” i samfunnet
- Jo lenger man beveger seg bort fra “kjerneområdene” (les: der dybden og kvaliteten på teoremene er det som teller), jo mer utfordrende er det for Abelkomiteen å vurdere den matematiske “substansen”.

Min tolkning av prisen til Meyer

Det er en pris til

- “wavelet-bevegelsen”, en av de siste tiårs mest spektakulære tverrfaglige suksesshistorier, med påviselig konkret betydning for teknologiutvikling og naturvitenskapelig forskning
- lederen for “wavelet-bevegelsen”, den som mer enn noen annen initierte feltet, hadde en finger med i de avgjørende fasene, som så sammenhengene, og som ikke minst brakte forskere fra mange ulike områder sammen med en ekstraordinær entusiasme
- en matematiker i verdensklasse, med flere fundamentale bidrag, både før og etter wavelet-perioden.

Forhistorien til wavelets: Morlet og Grossmann

I retrospekt kan vi se mange forløpere til wavelet-teori, men det som utløste "revolusjonen" på 1980-tallet, var Jean Morlets arbeid med seismiske signaler på 1970-tallet og samarbeidet han innledet med Alex Grossmann tidlig på 1980-tallet.

Morlets idé illustreres best om vi først minner om korttids-Fourier-transformasjonen (innført av David Gabor i 1945):

$$S_g f(\tau,\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-\tau) e^{-i\tau\omega} dt,$$

hvor g er en glatt og godt lokalisert funksjon (f. eks. en gaussisk funksjon) og f er funksjonen vi ønsker å analysere eller representere. Hvis $\int |g|^2 = 1$, har vi inversjonsformelen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} S_g f(\tau) g(t-\tau) e^{it\omega} d\tau d\omega.$$

To problemer med korttids-Fourier-transform

- Hovedproblemet for Morlet var at “tidsvinduet” $g(t-\tau)$ har samme utstrekning for alle frekvenser ω. Dette er uhensiktsmessig om man ønsker å fange opp eller forstå “transienter” eller detaljer som er å finne på ulike skalaer
- Det er umulig å finne “gode” g slik at $g(t-m)e^{i2\pi nt}$ blir en ortogonal basis for $L^2(\mathbb{R})$ (Balian–Low-teoremet). (“Ingen diskret ikke-redundant korttids-Fourier-transform”.)

Morlets løsning på det første problemet var å erstatte $g(t-\tau)e^{-i\tau\omega}$ med $a^{-1/2}g((t-\tau)/a)$ for $a>0$ og $S_g f$ med

$$W_g f(\tau, a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt,$$

hvor minimumskravet til g nå essensielt er at $\int g = 0$ (“wavelet”).

Calderóns formel

Grossmann satte Morlets arbeid inn i et teoretisk rammeverk og kom frem til en kontinuerlig inversjonsformel tilsvarende den for S_g:

$$f(t) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W_g f(\tau, a) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{d\tau da}{a^2},$$

hvor normaliseringen nå er $\int |\widehat{g}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} = 1$.

Det var her Meyer dukket opp (ca. 1985). Han gjenkjente ovenstående som "Calderóns formel" som han selv hadde brukt da han i 1982 beviste Calderóns formodning (mer om det senere).

De grunnleggende spørsmålene for Meyer, Ingrid Daubechies og Grossmann i 1985 var:

- Hvordan diskretisere Calderóns formel?
- Fantes et tilsvarende hinder som Balian-Low-teoremet her?

Meyers konstruksjon

Under formodningen om at svaret på det siste spørsmålet var "ja" skrev de tre sammen et arbeid med tittelen "*Painless nonorthogonal expansions*" som et svar på det første spørsmålet. Senere i 1985 brøt imidlertid Meyer så å si "Balian–Low-forbannelsen" ved å konstruere visse funksjoner ψ i Schwartz-klassen slik at systemet

$$2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

utgjør en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$. (Men ca. et år senere oppdaget Meyer at han selv hadde vært til stede da Jan Olov Strömberg i 1981 presenterte en klasse av slike basiser der ψ var visse spline-funksjoner ...)

Multiskalaanalyse og quadrature mirror-filtre

Meyer kom nå i kontakt med Stéphane Mallat, som var PhD-student i signalbehandling ved University of Pennsylvania. Kontakten oppsto gjennom Meyers PhD-student Stéphane Jaffard. Samarbeidet med Mallat hadde to viktige konsekvenser:

- Det ble formulert et teoretisk rammeverk (multiskalaanalyse) for konstruksjon av ortonormale wavelet-basiser
- Det ble påvist at ortonormale wavelet-basiser kunne knyttes til såkalte quadrature mirror-filtre i signalbehandling og pyramide-algoritmer i bildebehandling.

Daubechies' wavelets med kompakt støtte

Et siste stort gjennombrudd i denne pionertiden kom i 1987 da Ingrid Daubechies (sterkt inspirert av forbindelsen til quadrature mirror-filtre og ideer fra signalbehandling) var i stand til å konstruere—på en systematisk måte—"mother-wavelets" med kompakt støtte. Dette var en tour de force og Daubechies' største og viktigste arbeid!

En videreutvikling av slike wavelets, utarbeidet av Daubechies i samarbeid med Cohen (student av Meyer) og Feauveau, til biortogonale wavelets, er det som faktisk brukes i den viktigste anvendelsen av wavelets.

Anvendelse av wavelets: JPEG2000

JPEG = Joint Photographic Experts Group—en stor gruppe av eksperter som har fastsatt standarder for koding og kompresjon av digitale bilder.

Anvendelsesområder i vår elektroniske hverdag: mobiltelefoner, printere og scannere; vitenskapelige anvendelser innen områder som fjernteknologi (remote sensing), medisinsk bildebehandling og distribusjon av meteorologiske data.

JPEGs siste standard kom i 2000 og kalles JPEG2000; utviklet for bildekompresjon i mobiltelefoner; fikk først i 2005 en vesentlig kommersiell anvendelse da det ble bestemt at den skulle brukes som kompresjonsstandard for digital kino.

Norge var første land som digitaliserte alle kinoer, takket være et stort spleiselag mellom bransjeorganisasjonen Film & Kino, kinoene selv og Hollywood; fullført i 2011.

Astronomiske anvendelser

Wavelet-teknikker brukes i dag innenfor mange typer signalbehandling; Abel-komiteen nevner som eksempler dekonvolusjon av bilder fra romteleskopet Hubble og ikke minst

- LIGOs (LIGO = Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) oppdagelse i 2016 av gravitasjonsbølger skapt av kollisjonen mellom to svarte hull.

Hva er Meyers bidrag til utviklingen av wavelets?

- Han konstruerte den første ortonormale wavelet-basisen med en wavelet i Schwartz-klassen
- Han fant, sammen med Stéphane Mallat, det riktige konseptuelle rammeverket (multiskalaanalyse) for konstruksjon av wavelet-basiser
- Han koblet Calderón og Zygmunds program til utviklingen av wavelets
- Han fremsto som den ubestridte og visjonære lederen av wavelet-revolusjonen og bidro sterkt til en usedvanlig tverrfaglig samhandling
- Han inspirerte og utdannet mange unge forskere, holdt en serie foredrag og kurs verden rundt og skrev flere viktige bøker.

Meyer som vitenskapelig leder og inspirator

Dette uttrykkes godt av Ingrid Daubechies i hennes omtale av Meyer i forbindelse med at han i 2010 mottok Gauss-prisen, der hun understreker hva han har betydd utover å spille en “pioneering role”:

- *But to all his students and collaborators, Yves Meyer also stands out by other characteristics, maybe less tangible in the written record—his insatiable curiosity and drive to understand, his openness to other fields, his boundless enthusiasm and energy that inspired many young scientists, not all of them mathematicians, and the selfless generosity with which he untiringly promoted their work.*

Meyers entusiasme—et eksempel

Meyers spesielle entusiasme og generøsitet er godt illustrert gjennom hans review (Mathematical Reviews) av Helsons bok “Harmonic Analysis” (1983):

- *This book is a piece of art. It can be read like a novel. [...] The conciseness, the deep simplicity and the elegance of style are already remarkable in the author’s mathematical production. [...] The reviewer would advise this book to be read as a source of intellectual excitement by any student in mathematics who still does not know whether he is interested in becoming a researcher in the field.”*

Kunne prisen vært delt?

Nøkkelpersoner i utviklingen av wavelet-teorien var—foruten Meyer—Jean Morlet, Alex Grossmann, Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat og litt senere Ronald Coifman. Av disse står Daubechies i en særklasse: I hennes mest berømte arbeid konstruerte hun ortogonale wavelet-basiser med kompakt støtte (i stor grad inspirert av ideer fra signalbehandling); disse såkalte Daubechies-waveletene og deres videreutviklinger er det som i stor grad brukes i dag, f. eks. i JPEG2000.

Min vurdering: Det var ingen feil å gi prisen til Meyer alene, men det ville heller ikke vært feil å dele prisen mellom Daubechies og Meyer.

Et sveip gjennom Meyers karriere

Det er interessant å se tilbake på hva Abelkomiteen skrev om Carleson:

- *Carleson is always far ahead of the crowd. He concentrates on only the most difficult and deep problems. Once these are solved, he lets others invade the kingdom he has discovered, and he moves on to even wilder and more remote domains of Science.*

En liten omskrivning kunne passe for Meyer:

- *Meyer inspires the crowd but is always independent of it. He concentrates on only the most important problems. Once these are solved, he lets others invade the kingdom he has discovered, and he moves on to other central domains of Science.*

Høydepunkt utenom wavelets

Meyer er vitenskapelig “autodidakt”. Hans skolering innenfor harmonisk analyse er etter eget utsagn basert på selvstudium av det som var bibelen for hans generasjon, nemlig Zygmunds “Trigonometric Series”. Jean-Pierre Kahane var bare nominelt hans veileder, men innflytelsen fra Kahane ser ut til å ha kommet da Meyer valgte det forskningsfelt der han oppnådde sitt første store gjennombrudd, nemlig diofantisk approksimasjon. (Dette vant han Salem-prisen for i 1970.)

Diofantisk approksimasjon ca. 1967–1974

Meyers viktigste resultat innenfor dette feltet var en fullstending avklaring av spørsmålet om for hvilke tall $\theta > 1$ man kan ha $\theta\Lambda \subset \Lambda$, hvor Λ er en såkalt modell-mengde ("model set" eller "cut-and-project set"). Svaret er at dette kan inntreffe når θ er enten et Pisot-tall (introdusert av Axel Thue) eller et Salem-tall, som er reelle algebraiske tall med en bestemt diofantisk approksimasjonsegenskap.

Dette er kanskje Meyers mest originale arbeid; i ettertid er det erkjent at Meyers "cut-and-project sets" er det første eksemplet på kvasikrystaller. (Dan Schechtman fikk Nobel-prisen i kjemi i 2011 for oppdagelsen av kvasikrystaller. Det er imidlertid lite som tyder på at Meyer hadde "virkelige" kvasikrystaller i tankene da han gjorde dette arbeidet.)

Calderón–Zygmunds program ca. 1974–1984

Sammen med Ronald Coifman og Alan McIntosh løste Meyer i 1982 et av de sentrale problemene innenfor et stort og ambisiøst "program" innenfor harmonisk analyse og operatorteori, initiert av Calderón og Zygmund (Chicago-skolen i harmonisk analyse), nemlig Calderóns formodning:

Teorem

La $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en Lipschitz-funksjon. Da er

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)(1+\varphi'(y))}{x-y+i(\varphi(x)-\varphi(y))} dy$$

begrenset på $L^2(\mathbb{R})$.

Dette resultatet ble raskt generalisert til andre situasjoner og mer generelle CZ-kjerner og åpnet opp for videreutvikling av teorien; flere av Meyers studenter spilte en viktig rolle her.

Navier–Stokes ca. 1994–1999

Meyers arbeid med wavelets ledet ham inn i bildebehandling, computer vision og turbulens (Navier–Stokes-ligningen). Han brukte i samarbeid med Cannone, Planchon, Lemarié-Rieusset Littlewood–Paley-teori til å til å forbedre et globalt eksistens-resultat kjent som Fujita–Kato-teoremet. Et annet viktig resultat fra denne perioden er en forbedret versjon av div-curl-lemmaet (fellesarbeid med Coifman, Semmes og P.-L. Lions).

Compressed sensing og tilbake til “model sets” 2000 –

Compressed sensing kan sees som en videreutvikling av ideer fra wavelet-perioden. Det er fascinerende at Meyer her returnerte til sine første arbeider om “model sets” og viste i 2008 (sammen med Matei):

Teorem

Enhver “cut and project”-mengde er en universell sampling-følge.

Dette overraskende resultatet kan uttrykkes slik: Bare vi vet at f har en Fourier-transform som lever på en mengde av mål mindre enn $2\pi/$tettheten til Λ, kan f gjenvinnes fra sampling på kvasikrystallen Λ. Eksistens av slike universelle sampling-mengder ble først påvist av Olevskii og Ulanovskii i 2006, men med en helt annen konstruksjon. Meyers enkle bevis var basert på et forbløffende og elegant dualitetsargument som brukte Poissons summasjonsformel.

Meyer og “Science”

Meyer’s arbeid er sterkt koblet til utviklingen av viktige områder utenfor matematikken, innenfor “Science” (konstruksjon av kvasikrystaller, wavelets, signal- og bildebehandling, computer vision, nevrovitenskap, turbulens og Navier–Stokes-ligningen, compressed sensing).

Jeg finner det interessant at Yves Meyer ble valgt inn i Académie des Sciences relativt sent, i 1993, som 54-åring. Han er imidlertid ikke valgt inn som matematiker, men som medlem av seksjonen for “Sciences mécanique et informatique”!

Yves Meyer—Lars Onsager Lecturer 2018

- Meyer er Onsager Lecturer for 2018 og vil holde sin forelesning ved NTNU 14. februar 2018.
- Meyer vil holde perleforedrag 15. februar 2018.