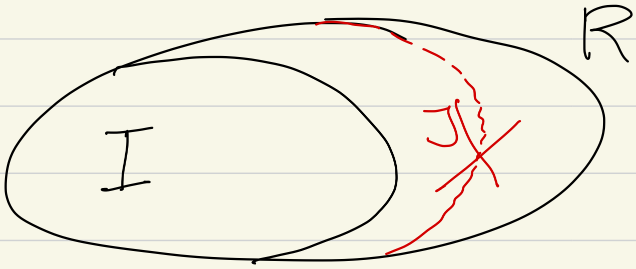
3YF

R komm. ring med 1, $I \subseteq R$ ideal

Når er R/I en kropp? $R = F[x]$, F kropp.

Eksempel p primtall $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ kropp.

DEF: $I \subseteq R$ er et maksimalt ideal, hvis $I \neq R$ og I og R er de eneste idealene i R som inneholder I



Eksempel p primtall

$(p) = p\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ maksimalt: Anta at $(p) \subseteq (a)$

dvs, $p = a \cdot z$ for en $z \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow a \mid p \Rightarrow a = \pm 1$ eller $a = \pm p$

$\Rightarrow (a) = \mathbb{Z}$ eller $(a) = (p)$

$\Rightarrow (p)$ maksimalt ideal.

Setning 84 R komm. ring med 1, $I \subseteq R$ ideal

I maksimalt ideal $\Leftrightarrow R/I$ er en kropp.

Bevis: Vet: R/I er en komm. ring med 1.

$\Rightarrow$: La $a + I \neq 0$ i R/I, dvs. $a \notin I$. La

$J = \{ra + i \mid r \in R, i \in I\} \subseteq R$.

Påstand: J ideal i R.

(i) $ra + i,\ r'a + i' \in J$

$$\Rightarrow ra + i - (r'a + i') = \overbrace{(r - r')}^{\in R} a + \overbrace{(i - i')}^{\in I,\ \text{siden } I \text{ er et ideal}} \in J$$

(ii) $s \in R$, $ra + i \in J$. Da er

$$s(ra+i) = s(ra) + si = (sr)a + \overbrace{si}^{\in J} \in J$$

$\Rightarrow J$ er et ideal i R.

Har at $I \subseteq J$.

$a \notin I$ og $a \in J \Rightarrow I \subsetneq J$

I maksimalt $\Rightarrow J = R \Rightarrow 1 \in J$

$\Rightarrow \quad 1 = ra + i$ for en $r \in R$ og $i \in I$.

$\Rightarrow \quad ra - 1 = -i \in I$

$\Rightarrow \quad ra + I = (r+I)(a+I) = 1 + I$

$\Rightarrow \quad a + I$ har en invers i $R/I \Rightarrow R/I$ kropp.

$\Leftarrow$: Anta at R/I er en kropp. Anta at $I \subsetneq J \subseteq R$ er et ideal. ØÅV: $J = R$.

Velg $a \in J \setminus I$, dvs. $a + I \neq 0$ i R/I. Det $\exists\, r + I \in R/I$ slik at

$$(r+I)(a+I) = ra + I = 1 + I \quad (R/I \text{ kropp}).$$

$\Rightarrow \quad ra - 1 = \alpha \in I$

$\Rightarrow \quad 1 = \underbrace{ra}_{\in J} - \underbrace{\alpha}_{\in I} \in J \Rightarrow J = R.$

$\Rightarrow \quad I$ maksimalt ideal. $\square$

Setning 85 (27.25)

F kropp. La $0 \neq p(x) \in F[x]$. Da har vi Idealet $(p(x)) \subseteq F[x]$ er maksimalt

$$\Longleftrightarrow p(x) \text{ er irredusibelt over } F.$$

Bevis: $\Leftarrow$: Anta at $p(x)$ er irredusibelt over F. Anta at $(p(x)) \subsetneq J \subseteq F[x]$ for et ideal J. ØÅV: $J = F[x]$.

34F

Har $J \neq (0)$. Vet: $J = (g(x))$ for en $g(x) \in F[x] \setminus \{0\}$
Har da at $p(x) = q(x)g(x)$ for en $q(x) \in F[x]$
$0 \neq p(x)$ irred. $\Rightarrow q(x) \in F \setminus \{0\}$ eller $g(x) \in F \setminus \{0\}$.

(i) $q(x) = c \in F \setminus \{0\} \Rightarrow g(x) = c^{-1}p(x) \in (p(x)) \Rightarrow J = (p(x))$ ↯.

(ii) $g(x) = c \in F \setminus \{0\} \Rightarrow \underbrace{c^{-1} \cdot \underbrace{c}_{\in (g(x))}}_{\in (g(x))} = 1 \in (g(x)) = J \Rightarrow J = F[x]$.

$\Rightarrow (p(x))$ maksimalt ideal.

$\Leftarrow$: Anta at $(p(x))$ er et maksimalt ideal.
Anta at $p(x) = f(x)g(x)$ for $f(x), g(x) \in F[x]$.
ØÅV: $f(x) \in F$ eller $g(x) \in F$.
Da er $(p(x)) \subseteq (f(x))$ og $(p(x)) \subseteq (g(x))$
Husk: $a \in I$ ideal $\Rightarrow aR \subseteq I$.
$(p(x))$ maksimalt $\Rightarrow (f(x)) = (p(x))$ eller $(f(x)) = F[x]$.

$\deg f(x) = \deg p(x) \Downarrow$ $\qquad\qquad \Downarrow$

for $c \in F$: $f(x) = cp(x)$ eller $f(x) = b$ for $b \in F \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

$\deg g(x) = 0 \Rightarrow g(x) \in F \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow p(x)$ er irred. over F. $\square$