Setning 62 (19.3)
Nulldivisorene i $\mathbb{Z}_n = \{\bar{r} \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(r,n) > 1\}$

Bevis: Har sett: $\gcd(r,n)=1 \Rightarrow \bar{r}$ enhet i $\mathbb{Z}_n \Rightarrow \bar{r}$ ikke nulldiv.
$\Rightarrow \{\bar{r}$ nulldivisor $\Rightarrow \gcd(r,n)>1\}$, dvs. har vist "$\subseteq$"

Anta at $\gcd(r,n)=d>1$ med $0<r<n$.
Har: $r=ds$ for $s\in\mathbb{Z}$, $0<s<r$
La $m=\frac{n}{d}\in\mathbb{Z}$. Da er $1<m<n$ og $\bar{m}\neq\bar{0}$ i $\mathbb{Z}_n$.
Har da at
$$\bar{r}\cdot\bar{m} = \overline{ds}\cdot\overline{\frac{n}{d}} = \overline{\cancel{d}s\frac{n}{\cancel{d}}} = \overline{sn} = \bar{0} \text{ i } \mathbb{Z}_n.$$
$\Rightarrow \bar{r}$ er en nulldivisor i $\mathbb{Z}_n$ og vi har vist "$\supseteq$". ~~Dette~~ gir likhet. $\square$

DEF: R kommutativ ring med 1. Ringen R kalles et <u>integritetsområde</u> hvis R ikke har noen nulldivisorer, dvs. $ab=0 \Rightarrow a=0$ eller $b=0$.

Eksempler
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ integritetsområder.

Direkte produkt av ringer
R_1, R_2 ringer. Dann
$$R_1\times R_2 = \{(r_1,r_2) \mid r_1\in R_1, r_2\in R_2\}$$

Addisjon: $(r_1,r_2)+(r_1',r_2') \overset{\text{def}}{=} (r_1+r_1', r_2+r_2')$
Multiplikasjon $(r_1,r_2)\cdot(r_1',r_2') = (r_1r_1', r_2r_2')$

$$1_{R_1 \times R_2} = (1_{R_1}, 1_{R_2})$$

<u>Sjekk:</u> $R_1 \times R_2$ er en ring med 1.

<u>Merk:</u> R_1, R_2 kommutative ringer
$\Longrightarrow R_1 \times R_2$ kommutativ.

<u>Eksempel</u>

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Komm. ring, ikke integritetsområde fordi:

$a = (1,0)$, $b = (0,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, begge $\neq 0$.

$a \cdot b = (1,0) \cdot (0,1) = (1 \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0,0) = 0$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ikke et integritetsområde.