Ringer

Eksempler

$\underbrace{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, M_2(\mathbb{R})}$ ⇝ har $+, \cdot$

alle grupper med $+$, men ikke med $\cdot$.

$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ er grupper under $\cdot$, men ikke med $+$.

$\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $M_2(\mathbb{R})\setminus\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ikke grupper med $\cdot$.

DEF: En ring $(R, +, \cdot)$ er en mengde R med to binære operasjoner $+$ og $\cdot$ (addisjon og multiplikasjon) slik at

(i) $(R, +)$ er en abelsk gruppe.

(ii) Multiplikasjonen er assosiativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(iii) Distributive lover

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}\right\} \forall a, b, c \in R.$$

Merk: Sløyfer multiplikasjonstegnet, skriver ab for $a \cdot b$.

DEF: En ring R er en ring med 1 (enhet/identitetselement) hvis $\exists$ nøytralt element $1 \in R$ m.h.p. multiplikasjonen, dvs. $\exists\, 1 \in R$ slik at

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

$\forall a \in R$.

DEF: Spesielle ringer

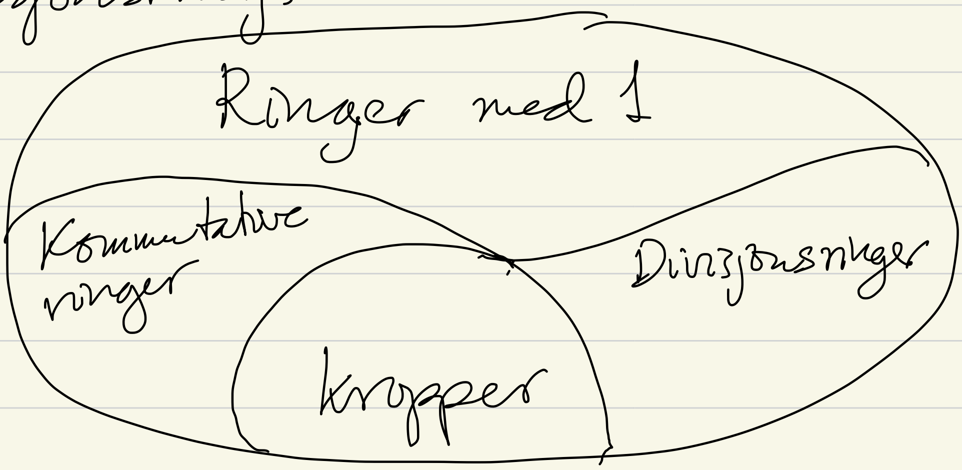
R ring med 1 ($\neq 0$).

(i) R er kommutativ hvis $ab = ba$, $\forall a, b \in R$.

(ii) R er en <u>divisjonsring</u> hvis hver $a \neq 0$ i R har en invers mht. p. multiplikasjonen dvs. $\exists\, a' \in R$ slik at

$$a'a = 1 = aa'.$$

(iii) R er en <u>kropp</u> hvis R er en kommutativ divisjonsring.



<u>Eksempler</u>

1) $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{C},+)$ abelske grp.
Multiplikasjonen i $\mathbb{C}$ er ass. $\Rightarrow$ Multiplikasjonen i $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ er ass.
Distributive lover holder i $\mathbb{C} \Rightarrow$ De holder i $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
$1 \in \mathbb{C}$ enhet $\Rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ringer med 1.

2) $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $+_5, \cdot_5$ ring med 1.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{1}\cdot\bar{1} = \bar{1},\ \bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{1},\ \bar{4}\cdot\bar{4} = \bar{1} \\ \mathbb{Z}_5 \text{ kommutativ} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z}_5 \text{ er en kropp.}$$