13F

§11 Direkte produkt og endelige abelske grupper.

Hva vet vi fra før om endelige abelske grupper?

- Kjenner alle de endelige sykliske gruppene, $\mathbb{Z}_n$ (Setning (4), ikke alle abelske grupper er sykliske for en gitt n, generelt.
- p primtall, gruppene av orden p = de sykliske gruppene av orden p.
- Hvis $|G| = 4$, kjenner vi to abelske grupper, nemlig $\mathbb{Z}_4$, eksempel fra Oppgave 1(d) i 4F (Klein 4-gruppa). Kan det være flere?

Direkte produkt av grupper

La G_1, G_2 være to grupper. Da er det direkte produktet av G_1 og G_2 gitt som mengden

$$\{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}.$$

Setning 28 (11.2)

Gitt to grupper G_1 og G_2. Da er $G_1 \times G_2$ en gruppe under operasjonen gitt ved

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

for $a_1, b_1 \in G_1$, og $a_2, b_2 \in G_2$.

Bevis: 1) $*$ er en binær operasjon.

2) Assosiativitet: $a_1, b_1, c_1 \in G_1$, $a_2, b_2, c_2 \in G_2$

$$(a_1, a_2) * [(b_1, b_2) * (c_1, c_2)]$$

13F

$$\overset{def}{=} (a_1, a_2) * (b_1 c_1, b_2 c_2)$$
$$\overset{def}{=} (a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2))$$
$$\overset{ass.}{=} ((a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2) c_2)$$
$$\overset{def}{=} (a_1 b_1, a_2 b_2) * (c_1, c_2)$$
$$\overset{def}{=} [(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] * (c_1, c_2)$$

3) Identitet: e_1 id. i G_1, e_2 id. i G_2

$$(e_1, e_2) * (a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2)$$
$$= (a_1, a_2)$$
$$= (a_1 e_1, a_2 e_2) = (a_1, a_2) * (e_1, e_2)$$

4) Invers: Gitt $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$, ser at (a_1^{-1}, a_2^{-1}) blir en invers til (a_1, a_2).

Sjekk.

$\Rightarrow$ $G_1 \times G_2$ er en gruppe. $\square$

Denne konstruksjonen kan generaliseres til et vilkårlig endelig antall grupper!

13F

Hvis $G_1, G_2, \dots, G_n$ er grupper, så blir

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i\}$$

en gruppe under operasjonen

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot (g_1', g_2', \dots, g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \dots, g_n g_n')$$

$g_i, g_i' \in G_i$ for $1 \le i \le n$.

Eksempel. 2 valg

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\quad$ $2 \cdot 2 = 4$ elementer i G.

$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \Rightarrow$

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1})\}$

Merk at:

$$(\bar{0},\bar{1}) + (\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0}+\bar{0}, \bar{1}+\bar{1}) = (\bar{0},\bar{0})$$
$$(\bar{1},\bar{0}) + (\bar{1},\bar{0}) = \qquad = (\bar{0},\bar{0})$$
$$(\bar{1},\bar{1}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1}+\bar{1}, \bar{1}+\bar{1}) = (\bar{0},\bar{0})$$

$\Rightarrow$ Ingen elementer av orden 4

$\mathbb{Z}_4$ har 2 elementer av orden 4 $(\bar{1}, \bar{3})$,
så $\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ($\cong$ Klein 4-gruppa).