Setning 23 (Cayley's teorem)
Enhver gruppe er isomorf med en undergruppe av permutasjoner.

Bevis: For en gruppe G, la

$$S_G = \{\text{alle permutasjoner av } G\}$$

Ønsker: $\varphi : G \longrightarrow S_G$ 1-1 grp. hom.
For $a \in G$, definer
$$\varphi(a) = \lambda_a : G \longrightarrow G$$

hvor $\lambda_a(g) = a \cdot g \quad , \forall g \in G.$

Påstår: 1) $\varphi(a) = \lambda_a \in S_G$: $\Leftarrow$ OK.

- λ_a på: Gitt $b \in G$, da er $\lambda_a(a^{-1}b) = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$

$\Rightarrow \lambda_a$ på.

- λ_a 1-1: Anta at $\lambda_a(g) = \lambda_a(h)$, dvs. $ag = ah$
Forkorting $\Rightarrow g = h$ og λ_a er 1-1.

2) φ grp. hom: $\varphi(ab) = \lambda_{ab}$, $\varphi(a)\varphi(b) = \lambda_a \circ \lambda_b$
Har
$$\lambda_{ab}(g) = (ab)g = a(bg) = \lambda_a(\underbrace{bg}) = \lambda_a(\lambda_b(g))$$
$$= (\lambda_a \circ \lambda_b)(g)$$
$\Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ og φ er en grp. hom.

3) φ er 1-1: Anta at $\varphi(a) = \varphi(b)$, dvs.

$$\lambda_a = \lambda_b \text{ og spesielt}$$

$$\left. a = a \cdot e = \lambda_a(e) = \lambda_b(e) = b \cdot e = b \right\} \Rightarrow a = b.$$

og φ er 1-1.

Lemma 22 (Oppgave 3) $\rightarrow$ G er isomorf med en undergruppe av S_G. $\square$

Merk: S_G ikke alltid er "minst" mulig. Setning 23 gir $D_4 \text{"}\hookrightarrow\text{"} S_8$, men har at

$$D_4 \text{"}\hookrightarrow\text{"} S_4.$$

Restklasser og Lagrange teorem

DEF: La $A \neq \emptyset$ være en mengde.

(a) En partisjon av A er en samling av ikke-tomme delmengder $\{A_i\}_{i \in I}$ slik at hvert element i A tilhører nøyaktig én delmengde A_i (celle)

(b) En relasjon R på A er en delmengde R av $A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$. Skriver aRb når $(a,b) \in R$.

(c) En relasjon R er en ekvivalensrelasjon

$\leq$

10L

hvis (i) $a \mathcal{R} a, \forall a \in A$ (refleksiv)

(ii) $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$ [symmetrisk]

(iii) $a \mathcal{R} b$ & $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$ (transitiv).