Noethers teorem

Noethers teorem er et resultat i fysikk som beskriver en sammenheng mellom "kontinuerlige" symmetrier til et mekanisk system og bevaringslover systemet oppfyller. I dette oppgavesettet skal vi se på hvordan slike symmetrier kan se ut og prøve å beskrive sammenhengen.

$\mathrm{SE}(n)$ er gruppen av orienteringsbevarende isomoetrier av $\mathbb{R}^n$. Dvs gruppen av bijeksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som bevarer avstander og orienterte vinkler. Det er et faktum at alle slike transformasjoner kan beskrives som å først gjøre en forskyvning og deretter en rotasjon om origo.

Oppgave 1: La g være en rotasjon med 90 grader i $\mathbb{R}^2$ rundt punktet $(1, 0)$. Beskrive g som produktet av en forskyvning og en rotasjon rundt origo.

Oppgave 2: La X være mengden av glatte funksjoner $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Kan du tenke deg en gruppevirkning av $\mathrm{SE}(n)$ på X?

Vi kan tenke på de glatte funksjonene i X som tilstander som endrer seg over tid. I et mekanisk system har vi i tillegg en funksjon $L \colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ som avhenger av tiden t, tilstanden ved det punktet $\mathbf{x}(t)$ og hastigheten ved det punktet $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$.

Vi sier at $g \in \mathrm{SE}(n)$ er en symmetri til systemet dersom vi for alle $t \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in X$ har at

$$L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = L(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)),$$

hvor $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.

Oppgave 3: La $\mathbf{x}$ være i X, g være i $\mathrm{SE}(n)$, og $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. Dersom g er en forskyvning hva er $\dot{\mathbf{y}}$? Dersom g er en rotasjon hva er $\dot{\mathbf{y}}$?

Oppgave A: La $n = 2$ og sett $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. La

$$L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - my$$

for en konstant m. Hva er symmetrigruppa til systemet? (Systemet beskriver en partikkel med masse m som beveger seg gjennom et uniformt gravitasjonsfelt der tyngdekraften peker nedover).

Oppgave B: La $n = 2$ og sett $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. La

$$L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m}{x^2 + y^2}$$

for en konstant m. Hva er symmetrigruppa til systemet? (Systemet beskriver en partikkel med masse m som beveger seg gjennom et gravitasjonsfelt med økende tyngdekraft inn mot origo).

Noethers teorem sier at det er en sammenheng mellom "kontinuerlige" symmetrier av et system og bevaringslover. I oppgave A fant du forhåpentlighvis ut at symmetrigruppa til systemet bestod av horisontale forskyvninger. Dette svarer til at i et slikt system er horisontal bevegelsesmengde bevart.

I oppgave B fant du forhåpentlighvis ut at symmetrigruppa bestod av rotasjoner rundt origo. Dette svarer til at i et slikt system er rotasjonsmengden (angular momentum) rundt origo bevart.

Beviset for Noethers teorem krever litt teori fra variasjonskalkulus og blir for teknisk til å gå igjennom her, men vi kan gi en forenklet guide til hvordan man finner bevaringslovene fra en symmetri.

La G være symmetrigruppa til systemet og la $g \colon \mathbb{R} \to G$ være en glatt funksjon slik at $g(0)$ er identiteten. La $\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en glatt funksjon som vi skal la variere. La $\mathbf{x}$ beskrive hvordan tilstanden til systemet vårt utvikler seg og sett $\mathbf{y}$ til å være $(g(\varepsilon))(\mathbf{x})$. Deretter tar vi en førsteordens Taylorutvikling av $L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ med hensyn på ε og $\dot{\varepsilon}$. Når vi gjør det får vi noe på formen

$$L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \approx L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \dot{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

Da sier Noethers teorem at $\frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ blir en bevart mengde.

Vi ser på de to eksemplene vi har fra oppgavene over: I det første eksempelet fant vi at symmetrigruppa bestod av horisontale forskyvninger. Så vi kan definere $g(\varepsilon)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(t) + \varepsilon(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. Plugger vi dette inn i L får vi

$$
\begin{aligned}
L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \frac{1}{2}m((\dot{x}+\dot{\varepsilon})^2 + \dot{y}^2) - my \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - my + m\dot{x}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 \\
&\approx L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + m\dot{x}\dot{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Altså får vi at den horisontale bevegelsesmengden $m\dot{x}$ er bevart.

I det andre eksempelet ble symmetrigruppa rotasjoner om origo. Det er da naturlig å velge $g(\varepsilon)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \end{bmatrix}$, siden vi uansett skal Taylorutvikle kan vi forenkle dette til $\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} x - y\varepsilon \\ x\varepsilon + y \end{bmatrix}$. Putter vi dette inn i L får vi

$$
\begin{aligned}
L(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &\approx \frac{1}{2}m((\dot{x} - \dot{y}\varepsilon - y\dot{\varepsilon})^2 + (\dot{y} + \dot{x}\varepsilon + x\dot{\varepsilon})^2) - \frac{m}{x^2+y^2} \\
&= L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + m\dot{\varepsilon}(\dot{y}x - \dot{x}y) + m\dot{\varepsilon}\varepsilon(y\dot{y} + x\dot{x}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}m\varepsilon^2(\dot{y}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2(y^2 + x^2) \\
&\approx L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + m\dot{\varepsilon}(\dot{y}x - \dot{x}y)
\end{aligned}
$$

Altså er rotasjonsmengden $m(\dot{y}x - \dot{x}y)$ bevart.

Oppgave 4: Prøv deg frem! Velg et mekanisk system og sett L til å være kinetisk energi minus potensiell energi. Regn ut symmetrigruppa. Kan du finne de bevarte mengdene?