Fouriertransformasjoner

I dette oppgavesettet skal vi se på abelske grupper hvor man kan definere integrasjon, såkalt lokalt kompakte abelske grupper. Vi vil se hvordan vi kan definere Fouriertransformasjoner på slike grupper og få en analog av Fouriers inversteorem.

Eksempler på lokalt kompakte grupper kan være $\mathbb{R}$ under addisjon, $\mathbb{Z}$ under addisjon, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ under multiplikasjon.

Oppgave 1 Finn alle (kontinuerlige) gruppehomomorfier fra G til $\mathbb{T}$ der G er en av de tre nevnte gruppene over.

Mengden av alle (kontinuerlige) gruppehomomorfier $G \to \mathbb{T}$ danner en gruppe under punktvis multiplikasjon, dvs $(\varphi \cdot \psi)(g) = \varphi(g) \cdot \psi(g)$. Denne gruppen kalles Pontryagin dualgruppa til G og betegnes $\widehat{G}$.

Oppgave 2 Beregn $\widehat{G}$ hvor G er de tre gruppene beskrevet over. Hva kan vi si om dobbeldualen $\widehat{\widehat{G}}$?

Som nevnt over er disse grupper som vi kan definere integrasjon på. Spesifikt ønsker vi å integrere funskjoner $f\colon G \to \mathbb{C}$. På de nevnte gruppene kan vi definere integrasjon henholdsvis ved

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
$$\int_{\mathbb{Z}} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$
$$\int_{\mathbb{T}} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\exp(it))dt$$

Gitt en funksjon $f\colon G \to \mathbb{C}$ definerer vi Fouriertransformasjonen $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ via

$$\widehat{f}(\hat{g}) := \int_G (f \cdot \hat{g})$$

Dette gir mening siden $\hat{g}\colon G \to \mathbb{T}$ også er en funksjon $G \to \mathbb{C}$, siden $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$.

Oppgave 3 Prøv deg litt frem, hva er sammenhengen mellom f og $\widehat{\widehat{f}}$? Finnes det andre abelske grupper der integrasjon gir mening, hva blir Fouriertransformasjonen der?