NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4150 Algebra**

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Solberg

Tlf: 47377952

Eksamensdato: 18. august 2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$.

a) La $g = (\overline{1}, \overline{1})$ i G. Hva er ordenen til elementet g? Forklar hvorfor G ikke er en syklisk gruppe.

b) Finn et element av orden 12 i G. Hvor mange elementer finnes det av orden 12 i G?

Oppgave 2 La $\mathbb{Z}_2[x]$ være ringen av alle polynomer i en variabel x over kroppen $\mathbb{Z}_2$.

a) Vis at $p(x) = x^3 + x + \overline{1}$ er et irredusibelt polynom over $\mathbb{Z}_2$. Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_2[x]/\langle p(x) \rangle$ blir en kropp, og hvorfor den har 8 elementer.

b) La $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$ i F. Regn ut

$$(y + \alpha)(y + \alpha^2)(y + \alpha^4)$$

i $F[y]$, og vis at det er lik $p(y)$.

Oppgave 3 La G være en gruppe av orden $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$.

a) Bruk Sylowteori til å vise at G har en normal undergruppe H_1 av orden 23 og en normal undergruppe H_2 av orden 29.

b) La H_1 og H_2 være som over, og la

$$H_1 \cdot H_2 = \{h_1 h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\},$$

som er en delmengde av G. Siden H_1 er en normal undergruppe av G, så er $H_1 \cdot H_2$ en undergruppe av G (Skal ikke vises). Gi minst en definisjon eller karakterisering av når en undergruppe K av G er normal. Vis at $H_1 \cdot H_2$ er en normal undergruppe av G.

Oppgave 4 La G være en endelig gruppe med to normale undergrupper H_1 og H_2.

a) Definer

$$\varphi\colon G \to G/H_1 \times G/H_2$$

ved at

$$\varphi(g) = (gH_1, gH_2).$$

Vis at φ er en homomorfi av grupper.

b) Vis at det finnes en en-til-en (injektiv) homomorfi av grupper

$$G/(H_1 \cap H_2) \to G/H_1 \times G/H_2.$$

Vis at denne homomorfien er en isomorfi av grupper hvis og bare hvis

$$\frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = |G|.$$

Oppgave 5 La G være en endelig syklisk gruppe av orden $n > 1$ med generator a, dvs. $G = \langle a \rangle$. Minner om at Eulers phi-funksjon φ er gitt ved at

$$\varphi(n) = |\{d \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \gcd(d, n) = 1\}|,$$

dvs. $\varphi(n)$ er antall heltall i mengden $\{1, 2, \ldots, n\}$ som er relativt primisk til n.

a) For en divisor d av n, vis at antall elementer i mengden

$$\{g \in G \mid |g| = d\}$$

er gitt ved Eulers phi-funksjon $\varphi(d)$, dvs. vis at antall elementer i G med orden d er gitt ved $\varphi(d)$.

b) Vis at

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$