Oppgave 1 La S_7 være den syvende symmetriske gruppen, dvs. S_7 er mengden av alle permutasjonene av elementene i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Beregn følgende produkt av permutasjoner

$$\sigma = (1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4, 5)$$

og

$$\tau = (1, 4)(1, 3)(1, 2),$$

og bestem ordenen til σ og τ.

b) La μ være permutasjonen $(1, 3, 2)(3, 5, 4)(5, 6)(6, 7, 1)$. Avgjør om μ er en like eller en odde permutasjon. Skriv μ som et produkt av disjunkte sykler og bestem ordenen til μ.

c) Finn et element av orden 10 i S_7. Forklar hvorfor det ikke finnes et element av orden 15 i S_7.

Oppgave 2 Definer $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ ved at

$$\varphi(z) = 2z + 4\mathbb{Z}$$

for alle $z \in \mathbb{Z}$.

a) Vis at φ er en homomorfi av grupper. Finn kjernen $\operatorname{Ker}\varphi$ til φ. Er φ injektiv (en-til-en)? Er φ surjektiv (på)?

b) Beskriv $\operatorname{Im}\varphi$ som undergruppe av $\mathbb{Z}_4$, og avgjør hvilken kjent gruppe fra kurset $\operatorname{Im}\varphi$ er isomorf med.

Oppgave 3 La $p(x) = x^3 + 2x + \overline{1}$ i $\mathbb{Z}_3[x]$.

a) Vis at $p(x)$ er et irredusibelt polynom over $\mathbb{Z}_3$. Forklar hvorfor

$$F = \mathbb{Z}_3[x]/(p(x))$$

er en kropp.

b) Vi har fra teorien at $G = F \setminus \{0\}$ er en syklisk gruppe under multiplikasjon. Vis at

$$\alpha = x + (p(x))$$

i F genererer G som en syklisk gruppe.

Oppgave 4 La G være en gruppe av orden p^n for et primtall p og et positivt heltall n. La X være en endelig G-mengde. Da er (som ikke skal vises)

$$|X| \equiv |X_G| \mod p,$$

dvs. $p \mid (|X| - |X_G|)$, der $X_G = \{x \in X \mid g * x = x, \text{ for alle } g \in G\}$.

La $X = G$, og definer en funksjon $- * -\colon G \times X \to X$ ved at

$$g * x = gxg^{-1}$$

for alle $g \in G$ og $x \in X$.

a) Vis at $*$ er en gruppevirkning, dvs. at X er en G-mengde, og at

$$X_G = Z(G),$$

der $Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz \text{ for alle } x \in G\}$.

b) Vis at ingen gruppe med orden p^n, for et primtall p og et positivt heltall $n > 1$, er en simpel gruppe.

Oppgave 5 La G være en gruppe med orden $p^t m$, hvor p er et primtall, og t og m er positive heltall med $1 < m < p$. Bruk et sylowteorem til å vise at G ikke er en simpel gruppe.