1. Ringarbeid i 31F

Oppgave 1. La $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 2$ og $g(x) = x^2 + x + 1$ i $\mathbb{R}[x]$. Bruk reduksjonstrinnet i divisjonsalgoritmen for polynomer i en variabel til å finne $q(x)$ og $r(x)$ slik at

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

der $r(x) = 0$ eller $\deg r(x) < \deg g(x) = 2$.

Oppgave 2. For en ring R vis at $R \subseteq R[x]$ er en underring.

Oppgave 3. Vis følgende resultat:

Setning 76. *La F være en kropp, $f(x)$ et polynom i $F[x]$ og $a \in F$. Da er a en rot i $f(x)$ hvis og bare hvis $f(x) = q(x)(x - a)$ for et polynom $q(x)$ i $F[x]$.*

Oppgave 4. La F være en kropp. Finn alle enhetene i $F[x]$.

Oppgave 5'. La E være en kropp, og la $F \subseteq E$ være en underkropp av E. For $\alpha \in E$ betrakt evalueringersavbildningen

$$\varphi_\alpha \colon F[x] \to E$$

gitt ved at $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$. Vis at φ_α er en homomorfier av ringer.

Oppgave 6'. La $\varphi_i \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ være evalueringshomomorfien gitt ved det komplekse tallet i.

(a) Vis at $\varphi_i(1 + x^2) = 0$.
(b) Vis at $\varphi_i(f(x)(x^2 + 1)) = 0$ for alle polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.
(c) Hvis $f(x) = q(x)(x^2 + 1) + r(x)$, når er $f(i) = 0$?
(d) Vis at $\operatorname{Ker} \varphi_i = (x^2 + 1)\mathbb{R}[x]$.

Oppgave 7': Utfordring. La F være en underkropp av en kropp E, og la $a \in E$. Anta at a er en rot i et ikke-null polynom i $F[x]$, og la $f(x)$ være et polynom i $F[x]$ av minst grad slik at a er en rot i $f(x)$. Vis at $\operatorname{Ker} \varphi_a = f(x)F[x]$.

2. Ringarbeid B i 31F

Oppgave 1.

(a) Finn alle irredusible polynomer av grad 2 over $\mathbb{Z}_2$.
(b) Finn alle irredusible polynomer av grad 3 over $\mathbb{Z}_2$.
(c) **Utfordring:** Finn alle irredusible polynomer av grad 4 over $\mathbb{Z}_2$.

Oppgave 2. Vis første del av følgende result:

Setning 79. *La F være en kropp. Ethvert polynom $f(x) \in F[x] \backslash F$ kan faktoriseres i $F[x]$ i et endelig produkt av irredusible polynomer, og de irredusible polynomene er entydig opp til rekkefølge og opp til enheter.*

Oppgave 3': Utfordring. La $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ være et polynom over en kropp F. Anta at $f(x)$ har n røtter $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ i en kropp E som inneholder F.

(a) Hva er a_0 som funksjon $s_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ av røttene $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$?

(b) Hva er a_{n-1} som funksjon $s_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ av røttene $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$?

(c) Hva er forholdet mellom $s_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ og $s_i(\alpha_{\pi(1)}, \alpha_{\pi(2)}, \ldots, \alpha_{\pi(n)})$ for hver av $i \in \{0, n-1\}$, hvor π er en permutasjon av $\{1, 2, \ldots, n\}$?

(d) Hva med de andre koeffisientene s_i foran x^i for $i = 2, 3, \ldots, n-2$? Har de noen tilsvarende egenskaper som s_0 og s_{n-1}?