Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".
(3) Husk å spørre om alle er enige/er med, og husk å si i fra om du ikke skjønner noe eller har en annen måte å tenke på. I forelesningene skal vi lære og ikke prestere.

1. Ringarbeid i 27F

Oppgave 1. La

$$R = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

med vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon. Vi har sett at R er en kropp.

(a) Vis at R er isomorf med $\mathbb{C}$.
(b) Hvilken operasjon O svarer det å transponere en matrise til i $\mathbb{C}$?

Oppgave 2. La R være en kropp. Vis at R er et integritetsområde.

Oppgave 3. Vis at $\mathbb{Z}_n$ er et integritetsområde hvis og bare hvis $\mathbb{Z}_n$ er en kropp.

Oppgave 4. La $R = R_1 \times R_2$ være det direkte produktet av to ringer R_1 og R_2. Vis at

$$U(R) = U(R_1) \times U(R_2).$$

Oppgave 5. Definer

$$\psi \colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

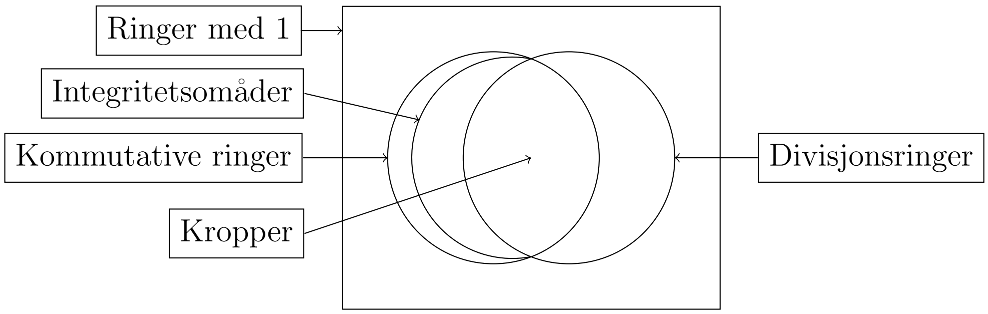
ved at $\psi(\overline{a}_{mn}) = (\overline{a}_m, \overline{a}_n)$, der $\overline{a}_t$ betyr heltallet a modulo heltallet t.

(a) Vis at $\psi \colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ er en isomorfi av ringer når $\gcd(m, n) = 1$.
(b) Bruk Oppgave 4 til å vise at

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

når $\gcd(m, n) = 1$ og φ er Eulers phi-funksjon.

Utfordring. Vi har allerede fylt ut et liknende diagram. Nå er det en klasse ringer til. Fyll inn eksempler som tar hensyn til den nye klassen av ringer.



Ekstraoppgaver i 27F

Definisjon. La R være en ring, og $n \in \mathbb{Z}$ et heltall. For $r \in R$ definerer vi $n \cdot r$ til å være r lagt til seg selv n ganger. Dvs, $1 \cdot r = r$, $2 \cdot r = r + r$, $3 \cdot r = r + r + r$ osv.

Vi sier at R har *karakteristikk* n hvis n er det minste positive heltallet slik at $n \cdot r = 0$ for alle $r \in R$. Hvis ingen slik n eksisterer sier vi R har karakteristikk 0.

For eksempel har $\mathbb{Z}$ karakteristikk 0, og $\mathbb{Z}_n$ har karakteristikk n.

Oppgaver fra boka. Seksjon 18: 27, 55, 56
Seksjon 19: 1, 2, 11, 23

Oppgave 1. La R være en ring med 1. *jacobsonradikalet* til R er mengden av alle $x \in R$ slik at $1 - rx$ er en enhet for alle $r \in R$.

(a) Hva er jacobsonradikalet til $\mathbb{Z}$?
(b) Hvis R er en kropp, hva er jacobsonradikalet til R?

En ring kalles *lokal* hvis et hvert element enten er en enhet eller er med i jacobsonradikalet.

(c) Er $\mathbb{Z}$ lokal? Er en kropp alltid lokal?
(d) La R være en kommutativ ring, og la x være slik at $x^n = 0$ for en $n \geq 1$. Vis at x er i jacobsonradikalet.
Hint: Hva er inversen til $1 - x$? Tenk på geometriske rekker.
(e) **Utfordring:** La R være en *endelig* kommutativ lokal ring. Vis at x er i jacobsonradikalet hvis og bare hvis $x^n = 0$ for en $n \leq |R|$.
Hint: Kan jacobsonradikalet inneholde idempotenter bortsett fra 0?

Oppgave 2. La R være et integritetsområde. Brøkkroppen til R består av ekvivalensklasser av "brøker". Dvs, ting på formen a/b med $a \in R$ og $b \in R \setminus \{0\}$, hvor to brøker a/b og c/d er ekvivalente hvis $ac = bd$.

(a) Kan du tenke deg hvordan addisjon og multiplikasjon defineres for en brøkkropp?
(b) Hva er brøkkroppen til $\mathbb{Z}$?
(c) Hva er brøkkroppen til en kropp.
(d) **Utfordring:** Hva skjer om vi prøver å definere brøkkroppen til en ring som ikke er et integritetsområde?