Gruppearbeid

Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.

1. Gruppearbeid A i 13F

Oppgave 1. La $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

(i) Hva er ordenen til G? Hva er elementene i G?
(ii) Hva er undergruppen av G generert av $(\overline{1}, \overline{1})$?
(iii) Vis at G er en syklisk gruppe.

Oppgave 2. La $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

(i) Hva er ordenen til G?
(ii) Hva er ordenen til elementet $(\overline{1}, \overline{1})$ i G?
(iii) Er G en syklisk gruppe?

Vi minner om den tallteoretiske definisjonen av minste felles multiplum av to heltall.

Definisjon. La r, s være to positive heltall. Da er $t > 0$ *minste felles multiplum*, skrevet $t = \operatorname{lcm}(r, s)$, hvis

(1) $r \mid t$ og $s \mid t$,
(2) hvis $r \mid u$ og $s \mid u$, så er $t \leq u$.

Oppgave 3. La G være en gruppe. La H_1 og H_2 være to undergrupper av G. Vis at $H_1 \cap H_2$ er en undergruppe av G.

Nå definerer vi en størrelse gruppeteoretisk, som vi skal vise er det samme som minste felles multiplum.

Definisjon. (Se 11.8) La r, s være to positive heltall. Da er $\operatorname{LCM}(r, s)$ den positive generatoren for undergruppen $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle$ av $\mathbb{Z}$.

Oppgave 4.

(a) Gitt to positive heltall r, s, vis at $\operatorname{lcm}(r, s) = \operatorname{LCM}(r, s)$.
(b) Gitt to positive heltall r, s. La $p_1, p_2, \ldots, p_n$ være de forskjellige primtallene som går opp i r og s, dvs.

$$r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

og

$$s = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

for $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Vis at

$$\operatorname{lcm}(r, s) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}}$$

og at

$$\gcd(r,s) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}.$$

(c) Vis at $rs = \operatorname{lcm}(r,s)\gcd(r,s)$.

Merk at vi har følgende sammenhenger:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \gcd(r,s) \rangle & \\
\langle r \rangle \arrow[ur, hook] & & \langle s \rangle \arrow[ul, hook'] \\
 & \langle r \rangle \cap \langle s \rangle = \langle \mathrm{LCM}(r,s) \rangle \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

2. Gruppearbeid B i 13F

Oppgave 1. La $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$.

(a) Hva er ordenen til G?
(b) Hva er ordenen til elementet $(\overline{2}, \overline{3}, \overline{3})$ i G?
(c) Hva er maksimal orden til et element i G? Finn et element av denne ordenen?

Oppgave 2. Vis følgende setning:

Setning 29. *La G_1, G_2 være to grupper. La $(a,b) \in G_1 \times G_2$, og anta at a har endelig orden r i G_1, og b har endelig orden s i G_2. Da har (a,b) orden* $\operatorname{lcm}(r,s)$ *i $G_1 \times G_2$.*

Oppgave 3. Vis følgende setning:

Setning 31. *La $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ for noen grupper $\{G_i\}_{i=1}^n$. Hvis a_i har endelig orden r_i i G_i for $1 \leq i \leq n$, så er ordenen til $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ lik minste felles multiplum av $r_1, r_2, \ldots, r_n$.*

Hint: Vis at

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}\{r_i\}_{i=1}^{n-1}, r_n) = \operatorname{lcm}\{r_i\}_{i=1}^{n}.$$

Deretter bruk induksjon til å vise resultatet.

Oppgave 4. Vis følgende setning:

Setning 32. *Gruppen*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$$

er syklisk og isomorf med $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ *hvis og bare hvis* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *er parvist relativt primiske, dvs.* $\gcd(m_i, m_j) = 1$ *for* $i \neq j$.