

GRUPPEARBEID

Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.

1. GRUPPEARBEID A I 13F

Oppgave 1. La $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

- (i) Hva er ordenen til G ? Hva er elementene i G ?
- (ii) Hva er undergruppen av G generert av $(\bar{1}, \bar{1})$?
- (iii) Vis at G er en syklisk gruppe.

Oppgave 2. La $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

- (i) Hva er ordenen til G ?
- (ii) Hva er ordenen til elementet $(\bar{1}, \bar{1})$ i G ?
- (iii) Er G en syklisk gruppe?

Vi minner om den tallteoretiske definisjonen av minste felles multiplum av to heltall.

Definisjon. La r, s være to positive heltall. Da er $t > 0$ *minste felles multiplum*, skrevet $t = \text{lcm}(r, s)$, hvis

- (1) $r \mid t$ og $s \mid t$,
- (2) hvis $r \mid u$ og $s \mid u$, så er $t \leq u$.

Oppgave 3. La G være en gruppe. La H_1 og H_2 være to undergrupper av G . Vis at $H_1 \cap H_2$ er en undergruppe av G .

Nå definerer vi en størrelse gruppeteoretisk, som vi skal vise er det samme som minste felles multiplum.

Definisjon. (Se 11.8) La r, s være to positive heltall. Da er $\text{LCM}(r, s)$ den positive generatoren for undergruppen $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle$ av \mathbb{Z} .

Oppgave 4.

- (a) Gitt to positive heltall r, s , vis at $\text{lcm}(r, s) = \text{LCM}(r, s)$.
- (b) Gitt to positive heltall r, s . La p_1, p_2, \dots, p_n være de forskjellige primtallene som går opp i r og s , dvs.

$$r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

og

$$s = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

for $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Vis at

$$\text{lcm}(r, s) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}}$$

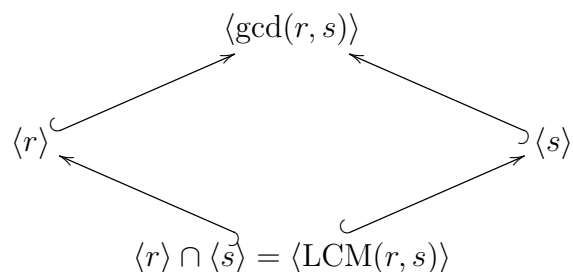
2

og at

$$\gcd(r, s) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots p_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}}.$$

(c) Vis at $rs = \text{lcm}(r, s) \gcd(r, s)$.

Merk at vi har følgende sammenhenger:



2. GRUPPEARBEID B I 13F

Oppgave 1. La $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$.

- Hva er ordenen til G ?
- Hva er ordenen til elementet $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{3})$ i G ?
- Hva er maksimal orden til et element i G ? Finn et element av denne ordenen?

Oppgave 2. Vis følgende setning:

Setning 29. La G_1, G_2 være to grupper. La $(a, b) \in G_1 \times G_2$, og anta at a har endelig orden r i G_1 , og b har endelig orden s i G_2 . Da har (a, b) orden $\text{lcm}(r, s)$ i $G_1 \times G_2$.

Oppgave 3. Vis følgende setning:

Setning 31. La $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ for noen grupper $\{G_i\}_{i=1}^n$. Hvis a_i har endelig orden r_i i G_i for $1 \leq i \leq n$, så er ordenen til (a_1, a_2, \dots, a_n) i $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ lik minste felles multiplum av r_1, r_2, \dots, r_n .

Hint: Vis at

$$\text{lcm}(\text{lcm}\{r_i\}_{i=1}^{n-1}, r_n) = \text{lcm}\{r_i\}_{i=1}^n.$$

Deretter bruk induksjon til å vise resultatet.

Oppgave 4. Vis følgende setning:

Setning 32. *Gruppen*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$$

er syklisk og isomorf med $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ hvis og bare hvis m_1, m_2, \dots, m_n er parvist relativt primiske, dvs. $\gcd(m_i, m_j) = 1$ for $i \neq j$.