Gruppearbeid

Generelt ved (digitalt) gruppearbeid: Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.

1. Gruppearbeid A i 10F

Oppgave 1. (Gammel eksamensoppgave) S_8 er gruppen av permutasjoner på mengden $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Se på elementet

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

i S_8.

(a) Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler.
(b) Hva er ordenen til σ?
(c) Tilhører σ den alternerende gruppen A_8? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2. (Gammel eksamensoppgave) La S_9 være alle permutasjonene av tallene $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. La H være undergruppen av S_9 generert av elementet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 5 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

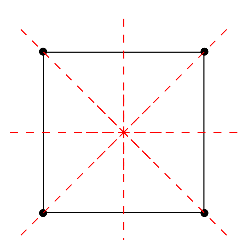
Forklar hvorfor H er en abelsk gruppe av orden 20.

Oppgave 3. Bevis følgende resultat.

Lemma 22. *La G og G' være to grupper, og la $\varphi\colon G \to G'$ være en homomorfi av grupper.*

(a) *La $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$. Vis at $\operatorname{Im}\varphi \subseteq G'$ er en undergruppe.*
(b) *Hvis φ er en-til-en, vis at φ induserer en isomorfi $\varphi\colon G \to \operatorname{Im}\varphi$.*

Oppgave 4. La D_4 være alle symmetriene av et kvadrat:



Vis at D_4 er isomorf med en undergruppe av S_4.

2. Gruppearbeid B i 10F

Oppgave 1. Vis følgende setning:

Setning 21. *La* $A_n = \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ like permutasjon}\}$. *Da er* A_n *en undergruppe av* S_n.

Gruppen A_n kalles den *n-te alternerende gruppen.*
Vi minner om følgende definisjon.

Definisjon. La S være en ikke-tom mengde. La $\mathcal{R}$ være en relasjon på S, dvs. en delmengde $\mathcal{R}$ av $S \times S$, hvor vi skriver $a\mathcal{R}b$ for (a, b) i $\mathcal{R}$. Da er $\mathcal{R}$ en *ekvivalensrelasjon* hvis

(i) $a\mathcal{R}a$ for alle $a \in S$ (refleksiv).
(ii) $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (symmetrisk),
(iii) $a\mathcal{R}b$ og $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ (transitiv).

Oppgave 2. La A være en ikke-tom mengde.

(a) La $\{A_i\}_{i \in I}$ være en partisjon av A, dvs. ethvert element i A tilhører nøyaktig en delmengde A_i. For $a, b \in A$ definer
$$a \sim b, \text{ hvis } a, b \in A_i \text{ for en } i \in I.$$
Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på A.

(b) La $\sim$ være en ekvivalensrelasjon på A. Definer
$$[a] = \{x \in A \mid a \sim x\} \subseteq A$$
for alle $a \in A$. Vis at samlingen $\{[a]\}_{a \in A}$ gir opphav til en partisjon av A.

Oppgave 3: Utfordring. La $A = \mathbb{Z}$. Betrakt delmengdene
$$A_0 = \{\text{alle liketallene}\} = 2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$$
og
$$A_1 = \{\text{alle oddetall}\}$$
av $A = \mathbb{Z}$. En ekvivalensrelasjon på A er gitt ved at
$$a \sim b \Leftrightarrow (a, b \in A_0 \text{ eller } a, b \in A_1),$$
siden $\{A_0, A_1\}$ er en partisjon av A. Kan vi karakterisere når to elementer a og b er ekvivalente, dvs. $a \sim b$, ved hjelp av en undergruppe av $\mathbb{Z}$?