Oppgave 1. La S_7 være gruppen av alle permutasjoner av elementene i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(1) Gitt permutasjonen $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ i S_7. Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler. Finn ordenen til σ og avgjør om σ er en like eller en odde permutasjon.

(2) Gitt permutasjonen σ fra (a) og permutasjonen $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i S_7. Beregn $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$. Finn antall elementer i undergruppen av S_7 som er generert av σ og τ, dvs. den minste undergruppen av S_7 som inneholder σ og τ.

Oppgave 2. La

$$H = \{(m, 4m) + (0, 5n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

som er en undergruppe av $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (skal ikke vises). Forklar hvorfor H er en normal undergruppe av G, og bestem faktorgruppen G/H.

Oppgave 3. La G være en gruppe av orden 323.

(1) Vis at G har en undergruppe av orden 19.

(2) La $H \subseteq G$ være en undergruppe av G med $H \neq G$. Vis at H er en syklisk gruppe.

Oppgave 4.

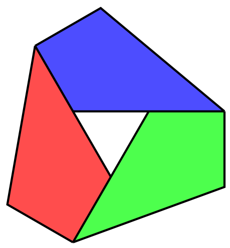

FIGURE 1. Drager peker med klokka

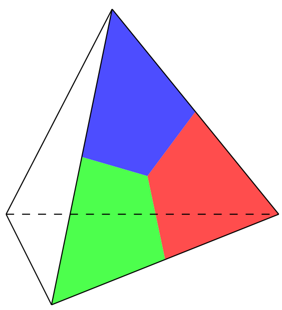

FIGURE 2. Tetraeder

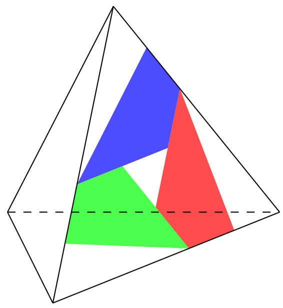

FIGURE 3. Dragene er rotert

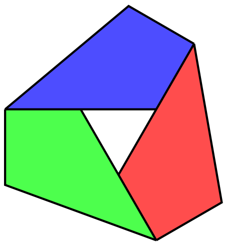

FIGURE 4. Drager peker mot klokka

FIGURE 5. VM-ballen

I år er fotball VM satt til Qatar. Idun og Sverre ønsker å gjennomføre en protestaksjon mot de forferdelige forholdene rundt arangeringen. Som en del av aksjonen sin har de tenkt å male så mange av de nye VM-ballene de kan.

De ønsker å male hver ball på en unik måte for å symbolisere hvordan alle mennesker er unike.

Hvis de skal få malt minst 1000 forskjellige baller, hvor mange typer maling trenger de? Hvis de kjøper inn akkurat nok typer maling, hvor mange baller får de da malt?

- Mønsteret på ballen består av 8 likesidede trekanter og 12 drageformer. Hver drage berører to trekanter og hver trekant berører 3 drager. Rundt 4 av trekantene peker dragene med klokka (se Figur 1) og rundt de resterende 4 peker de mot klokka (se Figur 4).

  Ballen kan konstrueres fra et tetraeder ved å dele hver sideflate inn i tre drageformede deler (se Figur 2), og deretter rotere hver drage 90 grader mot klokka. Det vil da formes en trekant i midten av hver sideflate, og en trekant ved hvert hjørne. Rundt trekantene i midten av sideflatene peker dragene mot klokka, og rundt trekantene i hvert hjørne peker dragen med klokka.

  Fotballen har altså samme rotasjonssymmetrier som et tetraeder, hvor trekanter tilsvarer hjørner og sentrum av sideflater, og dragene tilsvarer dragene på sideflatene til tetraederet.
- **VARIANT 1:** For at folk fortsatt skal se at det er VM-baller har de bestemt seg for å kun male trekantene og IKKE dragene. Men for at folk skal se hva de har gjort har de tenkt å male ALLE trekantene på hver ball.

  VARIANT 2: Siden de hvite trekantene er et fint symbol på fred, har de bestemt seg for å male kun dragene og IKKE trekantene. Men siden de er glad i farger vil de male ALLE dragene på hver ball.
- Som nevnt tidligere ønsker de at alle ballene skal være forskjellig fra hverandre. Vi sier at to baller er fargelagt likt hvis vi kan rotere den ene slik at den ser ut som den andre. Hver lapp på ballen fargelegges helt og med kun en farge. Vi tar kun utgangspunkt i fargeleggingen når vi sammenlikner baller.

Oppgave 5. La E være en endelig kropp med 3^6 elementer.

(1) La $\theta\colon E \to E$ være en isomorfi av kroppen (ringen) E. Definer

$$E^\theta = \{a \in E \mid \theta(a) = a\}.$$

Vis at $E^\theta \subseteq E$ er en underring av E, og at E^θ er en kropp.

(2) Definer $\varphi\colon E \to E$ ved at

$$\varphi(a) = a^3$$

for alle $a \in E$. Vis at φ er en homomorfi av ringer.
(**Hint:** Bruk binomialformelen og induksjon).

Forklar hvorfor φ^i også er en ringhomomorfi for alle heltall $i \geq 1$, der

$$\varphi^i\colon E \to E,$$

er induktivt gitt ved at

$$\varphi^i(a) = \varphi(\varphi^{i-1}(a))$$

for alle $a \in E$.

(3) Vis at φ er en isomorfi, og at $\varphi^6 = \mathrm{id}_E$, der $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ er identitetsavbildningen fra E til E.

(4) Vis at $E^{\varphi^i} = E^{\varphi^{6-i}}$ for $i = 1, 2, 3$. Vis at alle underkropper av E er av formen E^{φ^t} for $t = 0, 1, 2, 3$.