1. Gruppearbeid 6F

Oppgave 3. For tallparene gitt under, finn undergruppen av $\mathbb{Z}$ generert av disse to heltallene:

(a) $(2,4)$.
(b) $(4,10)$.
(c) $(5,9)$.

Fasit. (a) Alle elementene in $(2,4)$ er på formen $2n+4m$ for $n,m \in \mathbb{Z}$. Siden $2n+4m = 2(n+2m)$, vi har at $\langle 2,4\rangle \subseteq \langle 2\rangle = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Motsatt alle elementene i $\langle 2\rangle$ er på formen $2n+4m$ (velg $m=0$), slik at $\langle 2\rangle \subseteq \langle 2,4\rangle$. Dermed har vi $\langle 2,4\rangle = \langle 2\rangle$.

(b) Alle elementene in $\langle 4,10\rangle$ er på formen $4n+10m$ for $n,m \in \mathbb{Z}$. Siden $4n+10m = 2(2n+5m)$, vi har at $\langle 4,10\rangle \subseteq \langle 2\rangle$. Motsatt alle elementene i $\langle 2\rangle$ er på formen $4n+10m$, ved å velge følgende

$$2t = 2(2\cdot(-2)t + 5\cdot t),$$

slik at $\langle 2\rangle \subseteq (4,10)$. Dermed har vi $\langle 4,10\rangle = \langle 2\rangle$.

(c) Alle elementene in $\langle 5,9\rangle$ er på formen $5n+9m$ for $n,m \in \mathbb{Z}$. Siden $1 = 5\cdot 2 + 9\cdot(-1)$, vi har at $\langle 1\rangle \subseteq \langle 5,9\rangle$. Siden $\langle 1\rangle = \mathbb{Z}$, det følger at $\langle 5,9\rangle = \langle 1\rangle$.

Oppgave 4. Forklar definisjonen av GCD muntlig til de andre i gruppen.

For tallparene gitt under, beregn GCD:

(a) $(2,4)$.
(b) $(4,10)$.
(c) $(5,9)$.

Fasit. (a) 2.
(b) 2.
(c) 1.

Utfordring: Oppgave 5. For to ikke-null heltall r,s vis at

$$\mathrm{GCD}(r,s) = \gcd(r,s).$$

Fasit. La $H = \langle d'\rangle = \langle r,s\rangle$. Vi har at $r,s \in H$, slik at $r = d'x$ og $s = d'y$ for noen $x,y \in \mathbb{Z}$. Dette betyr at $d' \mid r$ og $d' \mid s$. La $d = \gcd(r,s)$. Da har vi at $d' \mid d$.

Vi har også at $r = dx'$ og $s = dy'$ og $d' = rn_1 + sm_1$ for heltall x', y', n_1, m_1. Dette gir at

$$d' = dx'n_1 + dy'm_1 = d(x'n_1 + y'm_1).$$

Dette viser at $d \mid d'$. Kombinerer vi dette med det vi viste over følger det at $d = d'$.

Utfordring: Oppgave 6. Vis følgende resultat.

Lemma 12. *Anta at* $\gcd(r, s) = 1$*. Hvis* $r \mid sm$*, da vil* $r \mid m$*.*

Fasit. Anta at $\gcd(r, s) = 1$. Har at $1 = rn_1 + sm_1$ for noen $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$. Dette gir

$$\begin{aligned} m = m \cdot 1 &= mrn_1 + msm_1 \\ &= rmn_1 + smm_1 \end{aligned}$$

$r \mid sm \Rightarrow sm = rx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &= rmn_1 + rxm_1 \\ &= r(mn_1 + xm_1) \end{aligned}$$

som medfører at $r \mid m$.