EKSAMEN: TMA4150 ALGEBRA
VÅREN 2021

Oppgave 1. La G være en abelsk gruppe med orden 72.

(1) Beskriv hvilke abelske grupper G kan være isomorf med.
(2) For hver av gruppene beskrevet under punkt (1), finn ordenen til elementet av høyest orden.

Oppgave 2. Betrakt Figur 1. En glassmester skal lage et vindu hvor hver av trekantene i figuren kan være blå, gul eller rød. Et vindu betraktes som det samme når vi roterer om senteret eller speiler vinduet om symmetriaksene til figuren.

(1) Beskriv de 8 elementene i symmetrigruppen G som virker på Figur 1.
(2) Betrakt følgende fargelegging av Figur 1 gitt i Figur 2. Hva er isotropiundergruppen $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$ av G for denne glassplaten x i Figur 2?
(3) Hvor mange forskjellige glassplater kan glassmesteren lage når vi betrakter to glassplater som like hvis de kan roteres eller speiles over i hverandre?

Oppgave 3. La $\sigma = (1, 3)$ og $\tau = (1, 2)(3, 4)$ være permutasjoner i S_4, den fjerde symmetriske gruppen.

(1) Finn ordenen til σ og τ.
(2) La G være undergruppen av S_4 som genereres av σ og τ. Er G en abelsk gruppe? Hvor mange elementer har G? Hint: Forklar hvorfor alle elementene i G er på formen:

$$(\sigma\tau)^n\sigma,$$
$$(\tau\sigma)^n\tau,$$
$$(\sigma\tau)^n,$$
$$(\tau\sigma)^n,$$

for heltall $n \geq 0$.

Oppgave 4. La G være en gruppe med orden 36.

(1) Hvor mange Sylow-3-undergrupper kan G ha?
(2) For to undergrupper H og K av G, la $H \cdot K$ betegne delmengden

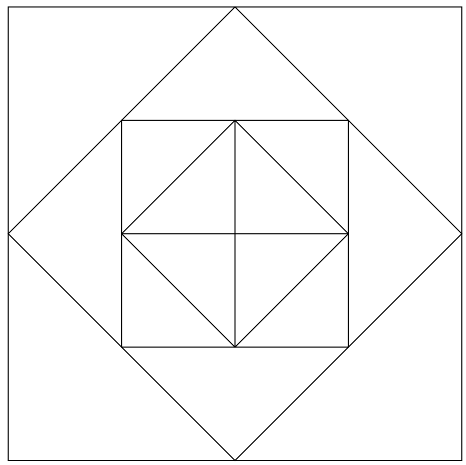
$$\{hk \mid h \in H, k \in K\} \subseteq G$$

av G. Et faktum er at $|H \cdot K| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ (trenger ikke vises). Hvis G har to forskjellige Sylow-3-undergrupper H og K, vis at $|H \cap K| = 3$.
(3) I kurset har vi lært at alle grupper med orden p^2 er abelske for et primtall p (trenger ikke vises). Hvis G har to forskjellige Sylow-3-undergrupper H og K, vis at $H \cap K$ er en normal undergruppe av både H og K.
(3) Vis at G ikke er en simpel gruppe. Hint: Vis at en av følgende undergrupper av G er normal: (i) en Sylow-3-undergruppe, (ii) snittet av to Sylow-3-undergrupper, (iii) normalisatoren til snittet av to Sylow-3-undergrupper.

Oppgave 5. La $p(x) = x^4 + x + \overline{1}$ være i $\mathbb{Z}_2[x]$.

(1) Vis at $p(x)$ er et irredusibelt polynom over $\mathbb{Z}_2$.
(2) La $E = \mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$. Forklar hvorfor E er en endelig kropp. Hvor mange elementer har E?
(3) La
$$F = \{\overline{0} + (p(x)), \overline{1} + (p(x)), x^2 + x + (p(x)), x^2 + x + \overline{1} + (p(x))\} \subseteq E.$$
Vis at F er en underkropp av E.
(4) Hvis $F' \subseteq E$ er en underkropp av E, så er E et vektorrom over F' (trenger ikke vises). Finnes det andre underkropper av E enn $\mathbb{Z}_2$, F og E?

Figur 1.



Figur 2.