Eksempler

1) F kropp, $F[x]$ vektorrom over F:

Definer $\varphi : F \times F[x] \longrightarrow F[x]$
ved at

$$\varphi(\alpha, \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n$$

for alle $f(x) = \qquad \in F[x]$.

Sjekk: $F[x]$ blir et vektorrom over F.

Mengden $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ utspenner $F[x]$ som vektorrom over F, og per definisjon at det er en basis.

2) $R = F[x]/(g(x))$, F kropp, $g(x) \in F[x]$.

R er et endelig dimensjonalt vektorrom over F når $g(x) \neq 0$: Vi definerer

$$\overset{F}{a} \cdot \overbrace{\left(f(x) + (g(x))\right)}^{\in R} \overset{\text{def}}{=} af(x) + (g(x))$$

Sjekk: R vektorrom over F.

La $\deg g(x) = n$.

Påstår: $\{1 + (g(x)), x + (g(x)), \ldots, x^{n-1} + (g(x))\}$ er en basis for R.

La $f(x) + (g(x)) \in R$. Da $\exists\, q(x), r(x) \in F[x]$

slik at $\quad f(x) = q(x)g(x) + r(x),$

der $r(x)=0$ eller $0 \le \deg r(x) < \deg g(x) = n.$

$\Rightarrow f(x) - r(x) = q(x)g(x)$

$\Rightarrow f(x) + (g(x)) = r(x) + (g(x))$

$\Rightarrow$ Ethvert elem. i R kan representeres av et polynom $r(x)$ av grad $\le n-1$, dvs.

$$r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$r(x) + (g(x)) = \underbrace{a_0(1+(g(x))) + a_1(x+(g(x))) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}+(g(x)))}_{(*)}$$

$\Rightarrow \{x^i + (g(x))\}_{i=0}^{n-1}$ utspenner R.

Anta at $(*) = 0$, dvs.

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + (g(x)) \overset{?}{=} 0 + (g(x))$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} - 0}_{\text{Hvis } \neq 0, \text{ så grad } \le n-1} \in \underbrace{(g(x))}_{\text{grad } \ge n = \deg g(x)}$$

$\Longleftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$ –

$\Rightarrow \{x^i + (g(x))\}_{i=1}^{n-1}$ lin. uavh.

$\Rightarrow$ —— " —— er en basis for R.

$$\dim_F F[x]/(g(x)) = \deg g(x).$$