Vet at for $\mathrm{Ker} f \subseteq R$, og mer generelt $\overset{\text{ideal}}{I} \subseteq R$,
så er $(\mathrm{Ker} f, +), (I, +) \subseteq R$ normale undergrp.
dvs. vi kan danne oss
$$(R/\mathrm{Ker} f, +) \text{ og } (R/I, +).$$
Kan vi betrakte disse som ringer?

a $\quad r \in R \quad ra, ar \in I$

R (komm) ring med 1, $I \subseteq R$ ideal

<u>Vet</u>: R/I abelsk gruppe.

<u>Elementer</u>: $r + I$, $r \in R$ $\quad r + I = s + I \Leftrightarrow r - s \in I$.

<u>Addisjon</u>: $(r+I)+(s+I) \overset{\text{def}}{=} (r+s)+I$

<u>Multiplikasjon</u>: $(r+I)(s+I) \overset{\text{def}}{=} rs + I$

Veldefinert?
$$\begin{array}{ccc} (r+I)(s+I) & = & rs + I \\ \parallel \quad \parallel & & \parallel \leftarrow ? \\ (r'+I)(s'+I) & = & r's' + I \end{array}$$

<u>Har</u>: $r - r' \in I$, $s - s' \in I$

<u>Har</u>:
$$\left.\begin{aligned} rs - r's' &= \underbrace{rs - rs'} + \underbrace{rs' - r's'} \\ &= \underbrace{r\underbrace{(s-s')}_{\in I}}_{\in I} + \underbrace{\underbrace{(r-r')}_{\in I}s'}_{\in I} \end{aligned}\right\} \in I$$

<u>Setning 85 (26.14)</u>

R (komm.) med 1, $I \subseteq R$ ideal. Da er R/I en ring med 1, der

$$(r+I)+(s+I) = (r+s)+I$$

$$(r+I)(s+I) = rs + I$$

og $\quad 1_{R/I} = 1 + I.$ ✓

Spesielt, R-komm. $\Longrightarrow$ R/I komm.

Bevis: Assosiative, distributive lover følger direkte fra R.

$1_{R/I} = 1 + I$:

$$\begin{aligned}(1+I)(r+I) &= 1 \cdot r + I \\ &= r + I \\ &= r \cdot 1 + I \\ &= (r+I)(1+I)\end{aligned}$$

R komm.:

$$\begin{aligned}(r+I)(s+I) &= rs + I \\ &= sr + I \\ &= (s+I)(r+I).\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ R/I komm. $\square$.