

Korollar 77 (23.5)

Et ikke-null polynom $f(x) \in F[x]$ for en kropp F , har høgst $\deg f(x)$ antall røtter i F .

Beris: Induksjon på $\deg f(x) = n$:

$n=1$: $f(x) = a_1x + a_0, a_1 \neq 0$
 $f(x) = 0 \rightarrow a_1x + a_0 = 0 \Rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$ eneste rot i F .

Påstanden sann for $n=1$.

$n > 1$: Anta sant for polynom av grad $\leq n-1$.
La $\deg f(x) = n$. Hvis $f(x)$ ikke har noen rot i F , påstanden sann. Anta at $f(x)$ har en rot $a \in F$.

Setn 76 $\Rightarrow f(x) = (x-a)f_1(x)$

Induksjon $\Rightarrow f_1(x)$ har høgst $n-1$ røtter i F .

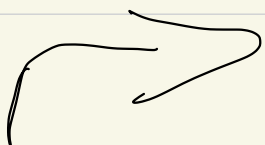
$\Rightarrow f(x)$ har høgst n røtter i F . \square

DEF: F kropp. Et ikke-konstant polynom $f(x) \in F[x]$ er irreducibelt over F hvis

$$f(x) = g(x)h(x)$$

med $g(x), h(x) \in F[x]$ medfører at $g(x) \in F$ eller $h(x) \in F$.

Husk: $\deg g(x)h(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$, $g(x), h(x) \in F[x] \setminus F$



Sætning 78 (23,10)

F kropp, $f(x) \in F[x]$ med $\deg f(x) = 2$ eller 3 ,

$f(x)$ irreducibelt over $F \iff \begin{cases} f(x) \text{ har ingen røtter} \\ \subset i F \end{cases}$

Bevis: \implies : Holder altid.

Antag at $f(x)$ har en rot $a \in F$.

Sætning 77 $\implies f(x) = (x-a)g(x)$, $g(x) \in F[x]$

$\deg f(x) \geq 2 \implies \deg g(x) \geq 1$

$\implies f(x)$ ~~irreducibelt~~ reducibelt.

\Leftarrow :

