Korollar 77 (23.5)

Et ikke-null polynom $f(x) \in F[x]$ for en kropp F, har høgst $\deg f(x)$ antall røtter i F.

Bevis: Induksjon på $\deg f(x) = n$:

$n=1$: $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$

$f(x) = 0 \to a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a_0}{a_1}$ eneste rot i $f(x)$.

Påstanden sann for $n=1$.

$n>1$: Anta sant for polynom av grad $\leq n-1$. La $\deg f(x) = n$. Hvis $f(x)$ ikke har noen rot i F, påstanden sann. Anta at $f(x)$ har en rot $a \in F$.

Setn 76 $\Rightarrow$ $\underset{n}{f(x)} = \underset{\deg 1}{(x-a)} \underset{\deg n-1}{f_1(x)}$

Induksjon $\Rightarrow$ $f_1(x)$ har høgst $n-1$ røtter i F.

$\Rightarrow$ $f(x)$ har høgst n røtter i F. $\square$

DEF: F kropp. Et ikke-konstant polynom $f(x) \in F[x]$ er irredusibelt over F hvis

$$f(x) = g(x)h(x)$$

med $g(x), h(x) \in F[x]$ medfører at $g(x) \in F$ eller $h(x) \in F$.

Husk: $\deg g(x)h(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$, $g(x), h(x) \in F[x] \setminus F$

$\deg g(x)h(x)$	$\deg g(x)$	$\deg h(x)$
2	1	1
3	1	2
	2	1

Setning 78 (23.10)

F kropp, $f(x) \in F[x]$ med $\deg f(x) = 2$ eller 3.

$f(x)$ irredusibelt over $F \iff \begin{cases} f(x) \text{ har ingen røtter} \\ \text{i } F \end{cases}$

Bevis: $\Rightarrow$: Holder alltid.

Anta at $f(x)$ har en rot $a \in F$.

Setn 77 $\Rightarrow$ $f(x) = (x-a)g(x)$, $g(x) \in F[x]$

$\deg f(x) \geq 2 \Rightarrow \deg g(x) \geq 1$

$\Rightarrow f(x)$ redusibelt.

$\Leftarrow$: $\square$