Venstre restklasser

G gruppe, $H \subseteq G$ undergruppe. Definer en relasjon $\sim_L$ på G ved at

$$a \sim_L b \iff a^{-1}b \in H.$$

Setning 24 (10,1)

$\sim_L$ er en ekvivalensrelasjon på G

Bevis: Refleksiv: $a \sim_L a$? Ja, siden $a^{-1}a = e \in H$

Symmetrisk: $a \sim_L b \Rightarrow b \sim_L a$?

$$a \sim_L b \Downarrow$$

$$a^{-1}b \in H \Longrightarrow H \ni (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}(a^{-1})^{-1} = b^{-1}a$$
$$\Longrightarrow b \sim_L a.$$

Transitiv: $a \sim_L b$ og $b \sim_L c \Rightarrow a \sim_L c$?

$$a^{-1}b,\ b^{-1}c \in H \Longrightarrow \underbrace{(a^{-1}\cancel{b})(\cancel{b^{-1}}c)}_{=\,a^{-1}c} \in H$$

$$a^{-1}c \in H \Longrightarrow a \sim_L c.$$

$\Longrightarrow \sim_L$ er en ekvivalensrelasjon. $\square$

Hva er den tilhørende partisjonen av G?

Har: $[a] = \{x \in G \mid a \sim_L x\}$

$$a \sim_L x \overset{\text{def}}{\iff} a^{-1}x \in H$$
$$\iff a^{-1}x = h \text{ for en } h \in H.$$

$\iff x = ah$ for en $h \in H$.
$\iff x \in aH = \{ah \mid h \in H\}$.

DEF: $H \leq G$ undergruppe. Delmengden

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

av G kalles den <u>venstre restklassen av H</u> som inneholder a.

Merk: H er en venstre restklasse, da $H = eH$.

Eksempel
La $G = S_3 = \{e = (\,), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$
$H = \langle (1,2) \rangle = \{(\,), (1,2)\} = eH$.
$(1,3)H = \{(1,3), (1,3)(1,2)\} = \{(1,3), (1,2,3)\}$
$(2,3)H = \{(2,3), (2,3)(1,2)\} = \{(2,3), (1,3,2)\}$.

$\Rightarrow$ 3 restklasser som gir en partisjon av G.

Lemma 25
La G være en endelig gruppe, $H \leq G$ en undergruppe. og $a \in G$. Da er
$$|H| = |aH|$$

Bevis: Definer $\varphi : H \longrightarrow aH$ ved at $\varphi(h) = ah$.
1-1: Anta at $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ for $h_1, h_2 \in H$.
Da er
$$\underset{\parallel}{\varphi(h_1)} = \underset{\parallel}{\varphi(h_2)}$$
$$ah_1 = ah_2 \xrightarrow{\text{Forkort}} h_1 = h_2$$

$\Rightarrow \varphi$ er 1-1.

På: La $b \in aH$. Da er $b = ah$ for en $h \in H$.
$\Rightarrow b = ah = \varphi(h)$. $\Rightarrow \varphi$ er på.

$\Rightarrow |H| = |aH|$. $\square$

Setning 26 (Lagrange teorem) (10,10)
La G være en gruppe, og $H \subseteq G$ undergruppe. Da deler ordenen til H ordenen til G, dvs.

$$|H| \mid |G|.$$

Bevis: Vi vet at G er en union av disjunkte venstre restklasser på formen aH for $a \in G$. Videre vet vi at $|aH| = |H|$ for alle $a \in G$. Hvis antall restklasser er r, så er

$$|G| = |H| \cdot r$$

og dermed $|H| \mid |G|$. $\square$