Homomorfier og spesielle elementer

DEF: R, R' ringer med 1. En funksjon $\varphi: R \longrightarrow R'$ er en ringhomomorfi hvis

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ $\quad (\varphi : (R,+) \to (R',+)$ grp. hom$)$

(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

(iii) $\varphi(1_R) = 1_{R'}$.

Eksempel

Definer $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ ved at $\varphi(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$

φ er en ringhomomorfi:

(i) $\varphi(r+r') = \begin{pmatrix} r+r' & 0 \\ 0 & r+r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix} = \varphi(r) + \varphi(r')$.

(ii) $\varphi(rr') = \begin{pmatrix} rr' & 0 \\ 0 & rr' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix} = \varphi(r)\varphi(r')$.

(iii) $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{M_2(\mathbb{R})}$

$\Longrightarrow \varphi$ ringhom.

Lemma 61

La $\varphi: R \longrightarrow R'$ være en ringhom. Da er

φ 1-1 $\Longleftrightarrow \ker\varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\} = \{0\}$.

Bevis: Har at $\varphi: (R,+) \longrightarrow (R',+)$ er en grp.hom. Definisjonen av kjernen til φ bruker ikke multiplikativ struktur av R eller R'. Resultatet følger da fra Korollar 39. $\square$

DEF: En ringhomomorfi $\varphi: R \longrightarrow R'$ er en isomorfi hvis φ er 1-1 og på.

DEF: R ring med $1 (\neq 0)$. Et element $u \in R$

er en <u>enhet</u> hvis u har en invers i R m.h.p. multiplikasjonen i R, dvs $\exists\, u' \in R$ slik at

$$uu' = 1 = u'u.$$

<u>Merk:</u> u' er entydig, skriver $u^{-1} = u'$.

<u>Eksempler</u>

1) $R = \mathbb{Z}$, enheter $1, -1$.
2) R divisjonsring $\Rightarrow (R \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppe $\Rightarrow$ $R \setminus \{0\}$ er enheter

<u>Nulldivisorer</u>

<u>Spesielle egenskaper i $\mathbb{Z}$:</u>

(i) $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ eller $b = 0$

(ii) $ab = ac$ og $a \neq 0 \Longrightarrow b = c$

(iii) $ab = cb$ og $b \neq 0 \Longrightarrow a = c$

<u>Oppgave:</u> Vis at (i) – (iii) er ekvivalente.

<u>DEF:</u> R ring med 1. Hvis $a, b \in R \setminus \{0\}$ med $ab = 0$, så kalles a og b <u>nulldivisorer</u>

<u>Eksempel</u>

$R = \mathbb{Z}_6$. Har $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$

$\Rightarrow$ Nulldivisorer: $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$.