

Ringer

Eksempler

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, M_2(\mathbb{R})$ har $+$, \cdot

alle grupper med $+$, men ikke med \cdot .

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er grupper under $+$, men ikke med \cdot .

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}, M_2(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ikke grupper med \cdot .

DEF: En ring $(R, +, \cdot)$ er en mengde R med to binære operasjoner $+$ og \cdot (addisjon og multiplikasjon) slik at

En \leftarrow (i) $(R, +)$ er en abelsk gruppe.

operasjon \rightarrow (ii) Multiplikasjonen er assosiativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Samspill (iii) Distributive lover

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

} $\forall a, b, c \in R$.

Mark: Sløyfer multiplikasjonstegnet, skriver ab istedenfor $a \cdot b$.

DEF: En ring R er en ring med 1 (enhet/identitets-element) hvis \exists nøytralt element $1 \in R$ m.h.p. multiplikasjonen, dvs. $\exists 1 \in R$ slik at

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

$\forall a \in R$.

DEF: Spesielle ringes

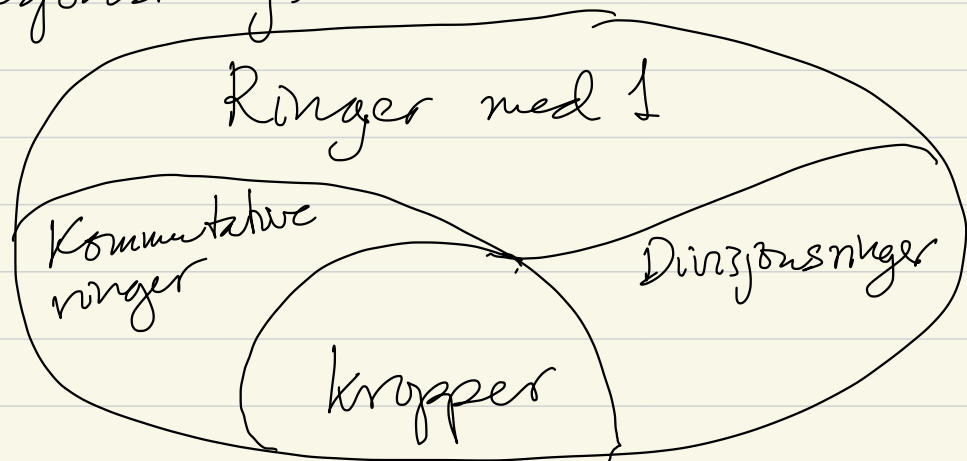
R ring med $1 (\neq 0)$.

(i) R er kommutativ hvis $ab = ba, \forall a, b \in R$.

(ii) R er en divisjonsring, hvis hver $a \neq 0$ i R har en invers indh.p. multiplikasjonen, dvs. $\exists a' \in R$ slik at

$$a'a = 1 = aa'$$

(iii) R er en kropp hvis R er en kommutativ divisjonsring.



Eksempler

1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ abelske grp.
 Multiplikasjonen i \mathbb{C} er ass. \Rightarrow Multiplikasjonen i $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ er ass.

Distributive lover holder i $\mathbb{C} \Rightarrow$ De holder i $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,
 $1 \in \mathbb{C}$ enhet $\Rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ringer med 1.

2) $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $+_5, \cdot_5$ ring med 1.

$\left. \begin{array}{l} \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}, \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}, \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1} \\ \mathbb{Z}_5 \text{ kommutativ} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{Z}_5 \text{ er en kropp.}$