1. Gruppearbeid B i 5F

Oppgave 3.

(a) La $\theta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ og $\rho = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ i S_5. Skriv θ og ρ som et produkt av disjunkte sykler. Beregn $\theta\rho$ og $\rho\theta$.

(b) La $\theta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ i S_8. Skriv θ som et produkt av disjunkte sykler.

Fasit. (a) $\theta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right) = (1, 2, 3)$ og $\rho = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right) = (4, 5)$.

$\theta\rho = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \rho\theta$.Merk her at θ og ρ kommuterer. Grunnen til

det er at de er at de er disjunkte sykler. I motsetning til hva vi så i Oppgave 1, der de to permutasjonene vi beregnet produktet av ikke kommuterte.

(b) $\theta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{smallmatrix}\right) = (1, 4, 6)(3, 8, 7, 5)$.

Oppgave 4. Fullfør beviset for følgende resultat:

Setning 18. *Enhver permutasjon i S_n kan skrives som et produkt av disjunkte sykler.*

Fasit. *Banen $B(x)$ til et element x* i en ikke-tom mengde A for en permutasjon σ av A, er gitt ved mengden

$$\{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Når vi utfører konstruksjonen gitt i forelesningen, så starter vi med banen $B(1)$ av 1, velger deretter et element a_2 som ikke er i $B(1)$. Deretter et element a_3 som ikke er i $B(1) \cup B(a_2)$, osv. Sett $a_1 = 1$. Når vi ser på $\cup_{i=1}^{t} B(a_i)$ er dette en mengde som blir større med økende verdier av t (familien $\{B(a_i)\}_{i=1}^{t}$ er disjunkte mengder). Siden vi $\{1, 2, \ldots, n\}$ er en endelig mengde må denne prosessen stoppe. Dette gir at alle permutasjoner er et produkt av disjunkte sykler.

Definisjon. En sykel i S_n av lengde 2 er en *transposisjon*.

Oppgave 5.

(a) Kan en skrive $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ i S_5 som et produkt av transposisjoner?

(b) Hvis alle sykler i S_n kan skrives som et produkt av transposisjoner, kan alle permutasjoner i S_n skrives som et produkt av transposisjoner?

(c) **Utfordring:** La σ være sykelen gitt ved $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r)$ i S_n for en $n \geq r$. Skriv σ som et produkt av transposisjoner.

Fasit. (a) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{smallmatrix}\right) = (1,3)(1,5)(1,2)$.

	1	2	3	4	5
$(1,2)$	2	1	3	4	5
$(1,5)$	2	5	3	4	1
$(1,3)$	2	5	1	4	3

(b) Alle permutasjoner i S_n kan skrives som et produkt av disjunkte sykler. Hvis alle sykler i S_n kans skrives som et produkt av transposisjoner, så kan alle permutasjoner i S_n skrives som et produkt av transposisjoner.

(c) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \cdots (a_1, a_4)(a_1, a_3)(a_1, a_2)$.

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{r-1}	a_r
(a_1, a_2)	a_2	a_1	a_3	a_4	$\cdots$	a_{r-1}	a_r
(a_1, a_3)	a_2	a_3	a_1	a_4	$\cdots$	a_{r-1}	a_r
(a_1, a_4)	a_2	a_3	a_4	a_1	$\cdots$	a_{r-1}	a_r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(a_1, a_{r-1})	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_r	a_1