1. Gruppearbeid A i 6F

Oppgave 1. Vi ser på permutasjoner av en mengde med 5 elementer. Beregn følgende uttrykk:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Fasit. La $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ og $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) $\theta\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\tau\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Merk at $\theta\tau \neq \tau\theta$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Oppgave 2.

(a) La $G = (\mathbb{Z}_6, +)$. Definer $f\colon G \to G$ ved at

$$f(x) = x + \overline{2}$$

for alle $x \in G$, der vi regner modulo 6. Er f en permutasjon av G? Hva om vi isteden for $\overline{2}$ valgte et annet element i G?

(b) La $G = (G, *)$ være en (endelig) gruppe. Fikser $g \in G$ og definer $f_g\colon G \to G$ ved at

$$f_g(x) = g * x$$

for all $x \in G$. Er f_g en permutasjon av G?

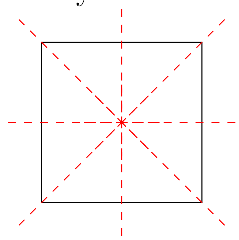
Fasit. (a) Definer $g\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ ved at $g(\overline{x}) = \overline{x} - \overline{2}$. Da er $fg = 1_{\mathbb{Z}_6} = gf$. Hvis $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, så er $\overline{x} = gf(\overline{x}) = gf(\overline{y}) = \overline{y}$, dvs. f er en-til-en. La $\overline{y} \in \mathbb{Z}_6$. Da er $f(g(\overline{y})) = \overline{y}$, slik at f også er på, dvs. f er en permutasjon av $\mathbb{Z}_6$.

Kan bruke det samme argumentet på alle elementene i $\mathbb{Z}_6$.

(b) Dette er en generalisering av det vi så i forrige oppgave. Vi har at $f_{g^{-1}} f_g = 1_G = f_g f_{g^{-1}}$, slik at vi kan bruke de samme argumentene som i (a) til å vise at f_g er en permutasjon av G for alle elementer g i G.

Merk: Dette gir en funksjon $\varphi\colon G \to S_G$ ved at $\varphi(g) = f_g$ for alle $g \in G$. Vis at dette er en homomorfi av grupper!

Utfordring: La D_4 være alle symmetriene av et kvadrat:



La

$$\begin{aligned}
\rho_i &= \text{ rotasjon mot klokka med } 90 \cdot i \text{ grader for } i = 0, 1, 2, 3, \\
\mu_1 &= \text{ speiling om horisontal symmetrilinje.} \\
\mu_2 &= \text{ speiling om verikal symmetrilinje.} \\
\delta_1 &= \text{ speiling om nord-vest diagonallinje.} \\
\delta_2 &= \text{ speiling om nord-øst diagonallinje.}
\end{aligned}$$

Kall nord-vest hjørnet av kvadratet 1, og nummerer de andre hjørnene $\{2, 3, 4\}$ fortløpende mot klokka. Finn en en-til-en korrespondanse fra D_4 til en delmengde av S_4.

Fasit.

$$\rho_0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$