

1. GRUPPEARBEID A I 6F

Oppgave 1. Vi ser på permutasjoner av en mengde med 5 elementer.

Beregn følgende uttrykk:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$

Fasit. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Oppgave 2.

(a) La $G = (\mathbb{Z}_6, +)$. Definer $f: G \rightarrow G$ ved at

$$f(x) = x + \bar{2}$$

for alle $x \in G$, der vi regner modulo 6. Er f en permutasjon av G ?
Hva om vi isteden for $\bar{2}$ valgte et annet element i G ?

(b) La $G = (G, *)$ være en (endelig) gruppe. Fikser $g \in G$ og definer $f_g: G \rightarrow G$ ved at

$$f_g(x) = g * x$$

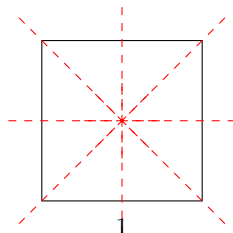
for all $x \in G$. Er f_g en permutasjon av G ?

Fasit. (a) Definer $g: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ ved at $g(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{2}$. Da er $f g = 1_{\mathbb{Z}_6} = g f$. Hvis $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, så er $\bar{x} = g f(\bar{x}) = g f(\bar{y}) = \bar{y}$, dvs. f er en-til-en. La $y \in \mathbb{Z}_6$. Da er $f(g(\bar{y})) = \bar{y}$, slik at f også er på, dvs. f er en permutasjon av \mathbb{Z}_6 .

Kan bruke det samme argumentet på alle elementene i \mathbb{Z}_6 .

(b) Dette er en generalisering av det vi så i forrige oppgave. Vi har at $f_{g^{-1}} f_g = 1_G = f_g f_{g^{-1}}$, slik at vi kan bruke de samme argumentene som i (a) til å vise at f_g er en permutasjon av G for alle elementer g i G .

Utfordring: La D_4 være alle symmetriene av et kvadrat:



La

$\rho_i =$ rotasjon mot klokka med $90 \cdot i$ grader for $i = 0, 1, 2, 3$,

$\mu_1 =$ speiling om horisontal symmetrilinje.

$\mu_2 =$ speiling om verikal symmetrilinje.

$\delta_1 =$ speiling om nord-vest diagonallinje.

$\delta_2 =$ speiling om nord-øst diagonallinje.

Kall nord-vest hjørnet av kvadratet 1, og nummerer de andre hjørnene $\{2, 3, 4\}$ fortløpende mot klokka. Finn en en-til-en korrespondanse fra D_4 til en delmengde av S_4 .

Fasit.

$$\rho_0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$