Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".

1. Gruppearbeid A i 4F

Oppgave 1. For følgende grupper avgjør hvilken av de er sykliske grupper:

(a) $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$.
(b) $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, alle heltallene modulo 4 under addisjon.
(c) For et positivt heltall n

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}\},$$

alle heltallene modulo n under addisjon.

(d) Betrakt følgende gruppe gitt ved gruppetabellen under:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Fasit. (a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = H$: $0 \in H$, siden H er en undergruppe. Ethvert element $n > 0$ i $\mathbb{Z}$ kan skrives som

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ganger}}.$$

Hvis n er i H for $n > 0$, så er også $-n$ i H, igjen siden H er en undergruppe. Dette viser at $\mathbb{Z}$ er en syklisk gruppe.

(b) Vi har

$$\mathbb{Z}_4 = \{\overline{1}, \overline{2} = \overline{1} + \overline{1}, \overline{3} = \overline{2} + \overline{1}, \overline{0} = \overline{3} + \overline{1}\} = \langle \overline{1} \rangle,$$

som viser at $\mathbb{Z}_4$ er en syklisk gruppe.

Oppgave 2. Bevis følgende resultat.

Setning 11. *En undergruppe av en syklisk gruppe er syklisk.*

Bevis. La G være en syklisk gruppe generert av a, dvs. $G = \langle a \rangle$. La $H \subseteq G$ være en undergruppe. Hvis $H = \{e\}$, så er $H = \langle e \rangle = \{e\}$ syklisk.

Anta at $H \neq \{e\}$. Da er $a^n \in H$ for en $n > 0$ i $\mathbb{Z}$. Husk: H undergruppe, slik at $a^n \in H$ hvis og bare hvis $(a^n)^{-1} = a^{-n} \in H$. La $m > 0$ være minst mulig i $\mathbb{Z}$ slik at $a^m \in H$.

Påstår: $H = \langle a^m \rangle$.

Siden $a^m \in H$, så er $\langle a^m \rangle \subseteq H$. La $b \in H \subseteq G$. Da er $b = a^n$ for en $n \in \mathbb{Z}$. Setning 8 medfører at det fins $q, r \in \mathbb{Z}$ slik at

$$n = mq + r,$$

med $0 \leq r < m$. Dette gir at $a^n = a^{mq+r} = a^{mq}a^r$.

Merk: $a^m \in H \Rightarrow (a^m)^q = a^{mq} \in H \Rightarrow (a^{mq})^{-1} = a^{-mq} \in H$, siden H er en undergruppe. Vider er $a^n \in H$. Dette medfører at $(a^{-mq}a^n = a^{-mq+n} = a^r \in H$. Siden $r < m$ og m er minste positive heltall med $a^m \in H$, så må $r = 0$. Dvs. $n = mq$ og $b = a^n = a^{mq} = (a^m)^q \in \langle a^m \rangle$. Vi har vist at $H \subseteq \langle a^m \rangle$. Siden vi allerede har den motsatte inklusjonen, så får vi $H = \langle a^m \rangle$, dvs. H er syklisk. $\square$

Utfordring: Oppgave 3. For følgende grupper avgjør hvilken av de er sykliske grupper:

(a) La $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\overline{a}, \overline{b}) \mid \overline{a} \in \mathbb{Z}_2, \overline{b} \in \mathbb{Z}_3\}$ under addisjon, der $(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a'}, \overline{b'}) = (\overline{a + a'}, \overline{b + b'})$.

(b) La $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ for to positive heltall n og m under addisjon, der $(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a'}, \overline{b'}) = (\overline{a + a'}, \overline{b + b'})$. Hint: Hvor mange element har G?

Fasit. (a) Gruppen $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ har 6 elementer. Vi har at

$$\begin{aligned}
(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1}) &= (\overline{0}, \overline{2}) \\
(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{0}, \overline{2}) &= (\overline{1}, \overline{0}) \\
(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) &= (\overline{0}, \overline{1}) \\
(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{0}, \overline{1}) &= (\overline{1}, \overline{2}) \\
(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{2}) &= (\overline{0}, \overline{0})
\end{aligned}$$

Sammen med $(\overline{1}, \overline{1})$ utgjør dette alle elementene i G, slik at $G = \langle (\overline{1}, \overline{1}) \rangle$ og G er syklisk.

(b) Antall elementer i $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ er mn. Anta at $\gcd(m, n) = d > 1$. Da er $n = dn'$ og $m = dm'$ for noen positive heltall n' og m'. For et vilkårlig element $(\overline{a}, \overline{b})$ i G, så er

$$\begin{aligned}
dm'n'(\overline{a}, \overline{b}) &= (\overline{dm'n'a}, \overline{dm'n'b}) \\
&= (m'\overline{dn'a}, n'\overline{dm'b}) \\
&= (m'\overline{na}, n'\overline{mb}) \\
&= (m'\overline{0}, n'\overline{0}) \\
&= (\overline{0}, \overline{0})
\end{aligned}$$

Dette viser at å addere $(\overline{a}, \overline{b})$ med seg selv $dm'n'$ ganger alltid gir identiteten, slik at den sykliske undergruppe generert av $(\overline{a}, \overline{b})$ har høyst

$dm'n'$ antall elementer. Vi har at $dm'n' < d^2m'n' = dm'dn' = mn$, slik at G er ikke en syklisk gruppe når $\gcd(m,n) > 1$.

Anta at $\gcd(m,n) = 1$. Vi har at $mn(\overline{1},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{0})$, slik at $\langle(\overline{1},\overline{1})\rangle$ har høyst mn elementer. Anta at $t(\overline{1},\overline{1}) = s(\overline{1},\overline{1})$ for $0 \leq s \leq t < mn$. Da er

$$(t-s)(\overline{1},\overline{1}) = ((\overline{0},\overline{0}),$$

dvs. $t - s = pn$ og $t - s = qm$, med andre ord, $n \mid t - s$ og $m \mid t - s$. Siden $\gcd(m,n) = 1$, så må $mn \mid t - s$. Vi har at $t - s < mn$, slik at vi må ha $t - s = 0$ eller $t = s$. Dette betyr at for $s \in [0..mn-1]$ alle elementene $s(\overline{1},\overline{1})$ er forskjellige, og de utgjør hele G. Ifølgelig er G syklisk, når $\gcd(n,m) = 1$.