Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele “whiteboard”.

1. Gruppearbeid A i 3F

Oppgave 1. Bevis følgende resultat.

Korollar 5. *La $G = (G, *)$ være en gruppe. For all $a, b \in G$, så er*

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Oppgave 2. Forklar definisjonene i videoen for 3F muntlig til de andre i gruppen.

Oppgave 3. La

$$\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}, \text{ alle heltallene modulo 4 under addisjon,}$$

$$\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}, \begin{array}{l}\text{alle heltallene som ikke er multiplum av}\\ \text{5 modulo 5 under multiplikasjon,}\end{array}$$

og

$$U_4 = \{1, i, -1, -i\}, \text{ under multiplikasjon.}$$

Hvilke av disse gruppene er isomorfe, og når de er isomorfe, finn en isomorfi?

Oppgave 4. La $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ under multiplikasjon, og la $U_2 = \{1, -1\}$ under multiplikasjon. Definer $\varphi\colon U_4 \to U_2$ ved at $\varphi(\sigma) = \sigma^2$. Avgjør om φ er en gruppehomomorfi eller ikke.

Utfordring: Oppgave 5. Gitt to grupper $G = (G, *)$ og $G' = (G', *')$, definer $\varphi\colon G \to G'$ ved at $\varphi(g) = g^{-1}$ for all g i G. Avgjør når φ er en gruppehomomorfi.

Når dere har fått tilsendt fasiten. Sammenlikn fasiten med svarene dere har kommet fram til. Formuler minst et spørsmål knyttet til oppgavene, og velg en person som fremfører dette spørsmålet på vegne av gruppa.

2. Gruppearbeid 3B

Oppgave 6.

(a) La $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ være gruppen av alle heltallene modulo 4 under addisjon. Finn de sykliske undergruppene generert av $\overline{1}$ og $\overline{2}$.

(b) La $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ under multiplikasjon. Vis at $H = \{1, -1\}$ er en undergruppe.

(c) La

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

være gruppen av alle inverterbare 2×2-matriser under matrisemultiplikasjon. Vis at

$$H = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

er en undergruppe av G. Er det mulig å beskrive alle undergruppene av G?

(d) La $U = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Kan $U = \langle e^{i\theta_0} \rangle$ for en θ_0 i $\mathbb{R}$?

Oppgave 7. Gitt en endelig gruppe G, så er det kun et endelig antall undergruppe av G. Generelt: Kan en finne alle undergrupper av G? Vet alltid at $\{e\}$ og G er undergrupper av G. For $\mathbb{Z}_2$ finnes ingen andre. For $G = \mathbb{Z}$ har vi

$$\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \ldots, \langle n \rangle, \ldots.$$

Finnes det andre?