Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".
(3) Husk å spørre om alle er enige/er med, og husk å si i fra om du ikke skjønner noe eller har en annen måte å tenke på. I forelesningene skal vi lære og ikke prestere.

1. Gruppearbeid A i 24F

Oppgave 1.

Setning 90. *La F være en kropp, og la $f(x) \in F[x]$ med $\deg f(x) \geq 1$.*

(a) *Da eksisterer en kropp E med F som underkropp slik at $f(a) = 0$ for en $a \in E$, dvs. $f(x)$ har en rot i E.*
(b) *Det eksisterer en kroppp $\widetilde{F}$ slik at $f(x)$ er et produkt av lineære faktorerer over $\widetilde{F}$ (og alle røttene i $f(x)$ er i $\widetilde{F}$).*

Hint: (a) Vi vet at $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_t(x)$ for irredusible polynomer $p_i(x)$ i $F[x]$ for $i = 1, 2, \dots, t$. Alle røttene i $p_i(x)$ er røtter i $f(x)$, og en rot i $f(x)$ er en rot i minst en $p_i(x)$. Dette gjør at hvis vi kan finne en kropp som inneholder en rot i, for eksempel, $p_1(x)$, så er vi fremme. La $E = F[x]/(p_1(x))$, og la $a = x + (p_1(x))$. Vis at F kan identifiseres med en underkropp av E, og at a er en rot i $f(x)$ betraktet som en polynom over E.

(b) Gjentatt bruk av (a).

Oppgave 2.

Setning 91. *La F være en kropp med karakteristikk p og la $n \geq 1$. La $\widetilde{F}$ være en kropp som inneholder alle røttene i $x^{p^n} - x$, og $F \subseteq \widetilde{F}$ er en underkropp. Polynomet $x^{p^n} - x$ har p^n forskjellige røtter i $\widetilde{F}$.*

Hint: Vis at 0 er en rot i $x^{p^n} - x$ med multiplisitet 1, dvs. $x^{p^n} - x$ er kun delelig med x, ikke x^2.

Hvis α er en rot forskjellig fra 0, vis at α er rot i $f(x) = x^{p^n} - 1$. Utfør divisjonen $f(x) : (x - \alpha)$, og betegn resultatet med $f_1(x)$. Vis at $f_1(\alpha) \neq 0$.

Oppgave 3.

Lemma 92. *La F være en kropp med karakteristikk $p > 0$. For $\alpha, \beta \in F$ så er*

$$(\alpha + \beta)^{p^n} = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n}$$

for alle $n \geq 1$.

Hint: Husk at

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i y^{m-i}.$$

For et primtall p betrakt brøken

$$\binom{p}{i} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i-1) \cdot i}.$$

Primtallet p vil alltid dele telleren i brøken over når $i \geq 1$. Primtallet p vil aldri dele nevneren i brøken over hvis $i < p$.

2. Gruppearbeid B i 24F

Oppgave 5.

(1) Konstruer en kropp med 4 elementer.
(2) Konstruer en kropp med 25 elementer.
(3) Konstruer en kropp med 16 elementer.
(4) Konstruer en kropp med 32 elementer.

Oppgave 6. La E være en kropp med 2^4 elementer. La $F \subseteq E$ være en underkropp.

(a) Hvor mange elementer kan F ha?
(b) Hva kan $\dim_F E$ være?

Oppgave 7'. La E være en kropp med p^n elementer for et primtall p og et heltall $n \geq 1$. La $F \subseteq E$ være en underkropp.

(a) Hvor mange elementer kan F ha?
(b) Hva kan $\dim_F E$ være?