Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".
(3) Husk å spørre om alle er enige/er med, og husk å si i fra om du ikke skjønner noe eller har en annen måte å tenke på. I forelesningene skal vi lære og ikke prestere.

1. Gruppearbeid A i 23F

Oppgave 1.

(a) Vis at $(p(x)) \subseteq \mathbb{Z}_2[x]$ er et maksimalt ideal, der $p(x) = x^3 + x^2 + \overline{1}$.
(b) Vis at $(p(x)) \subseteq \mathbb{Z}_2[x]$ er et maksimalt ideal, der $p(x) = x^5 + x^2 + \overline{1}$.

Vektorrom over en kropp

Definisjon. La F være en kropp. Et *vektorrom* V over F er en abelsk gruppe $(V, +)$ med en virkning av F på V, dvs. det fins en funksjon

$$F \times V \xrightarrow{\varphi} V,$$

der vi skriver $\varphi(a, v) = av$ (skalarmultiplikasjon) slik at følgende aksiomer er oppfylt

(1) $(a + b)v = av + bv$,
(2) $a(v + w) = av + bw$,
(3) $a(bv) = (ab)v$,
(4) $1_F \cdot v = v$,

for alle $a, b \in F$ og $v, w \in V$.

Merk: 1) De samme aksiomene som for vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

2) Mange resultater i linear algebra bruker elementære radoperasjoner og at de har inverse operasjoner. Har vi det tilsvarende for vektorrom over en kropp?

Elementær radoperasjon	Invers av radoperasjonen over F
Multiplisere en rad med $c \in F \setminus \{0\}$	Multiplisere samme rad med c^{-1}.
To rader bytter plass $i \leftrightarrow j$	Radene bytter plass igjen, $i \leftrightarrow j$.
Legger et ikke-null multiplum c av rad i til rad j, der $i \neq j$	Legger $-c \cdot$ rad i til rad j.

Sjekk bevisene for vektorrom over $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ for å se at de ikke bruker annet enn at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er kropper. Dette gjør at vi har de samme resultatene og definisjonene, spesielt de følgende, der F er en kropp og V er vektorrom over F:

Definisjon. (a) En mengde $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$

(i) *utspenner* V hvis for alle $v \in V$ eksisterer $a_i \in F$ slik at

$$v = \sum_{i\in I} a_i v_i,$$

der kun endelig mange av a_i'ene er $\neq 0$.

(ii) er *lineært uavhengig* hvis

$$\sum_{i\in I} a_i v_i = 0,$$

der kun endelig mange av a_i'ene er $\neq 0$, impliserer at $a_i = 0$ for alle $i \in I$.

(iii) er *en basis for* V hvis den utspenner V og er lineært uavhengig.

(b) V er et *endelig dimensjonalt vektorrom* hvis en endelig delmengde av V utspenner V.

Oppgave 2'. La V være et endelig dimensjonalt vektorrom over en kropp F. Vis en av følgende påstander:

(a) Vis at enhver lineær uavhengig mengde kan utvides til en basis for V.
(b) Enhver mengde som utspenner V inneholder en basis for V.
(c) V har en basis, og alle basiser for V består av det samme antall elementer, betegnes $\dim_F V$, og kalles *dimensjonen til* V *over* F.
(d) La $\{v_i\}_{i=1}^n$ være en delmengde av V som utspenner V. Vis at $\{v_i\}_{i=1}^n$ er en basis for V hvis og bare hvis for alle $v \in V$ så kan v skrives entydig på formen

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

med $a_i \in F$.

2. Gruppearbeid B i 23F

Oppgave 3. La $p(x) = x^5 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.

(a) Vis at $E = \mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$ er en kropp.
(b) Hva er $\dim_{\mathbb{Z}_2} E$?
(c) Hvor mange elementer har E?
(d) Vi har at $\mathbb{Z}_2$ er en underkropp av E, slik at vi kan betrakte $p(x)$ som et polynom over E. Hvordan kan vi faktorisere $p(x)$ over E?

Oppgave 4'. La R være et integritetsområde. Definer $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$ ved at

$$\varphi(z) = \begin{cases} \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{z \text{ ganger}}, & z > 0, \\ 0, & z = 0, \\ \underbrace{(-1_R) + (-1_R) + \cdots + (-1_R)}_{-z \text{ ganger}}, & z < 0, \end{cases}$$

(a) Vis at φ er en homomorfi av ringer.
(b) Vis at enten er $\operatorname{Ker}\varphi = (0)$ eller $\operatorname{Ker}\varphi = p\mathbb{Z}$ for et primtall p.

Hvis R er en kropp, så kalles den ikke-negative generatoren av $\operatorname{Ker}\varphi$ for *karakteristikken* til kroppen R.

(c) Hva er karakteristikken til $\mathbb{Z}_p$, hvor p er et primtall?
(d) Hva er karakteristikken til $\mathbb{C}$?

Oppgave 5'. La p være et primtall, og la $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \to E$ være en homomorfi av kropper. Vis at E blir et vektorrom over $\mathbb{Z}_p$ ved at

$$a \cdot x = \varphi(a)x$$

for $a \in \mathbb{Z}_p$ og $x \in E$.

Oppgave 6'. La $\psi\colon R \to S$ være en homormorfi av ringer. Definer $\widetilde{\psi}\colon R[x] \to S[x]$ ved at for $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ i $R[x]$ så er

$$\widetilde{\psi}(f(x)) = \psi(a_0) + \psi(a_1)x + \cdots + \psi(a_n)x^n.$$

Vis at $\widetilde{\psi}$ er en homomorfi av ringer.