Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".
(3) Husk å spørre om alle er enige/er med, og husk å si i fra om du ikke skjønner noe eller har en annen måte å tenke på. I forelesningene skal vi lære og ikke prestere.

1. Gruppearbeid A i 22F

Oppgave 1. La F være en kropp. For et gitt polynom $g(x) \in F[x]$ vis at

$$I = \{q(x)g(x) \mid q(x) \in F[x]\} = q(x)F[x]$$

er et ideal i $F[x]$. Vi skriver $I = (g(x))$.

Oppgave 2. Vis følgende resultat:

Setning 83. *La F være en kropp. Alle idealene i $F[x]$ er av formen $(g(x))$ for et polynom $g(x)$ i $F[x]$.*

Hint: Bruk divisjonsalgoritmen for polynomer.

Oppgave 3. Vis følgende resultat:

Setning 84. *La $f\colon R \to S$ være en ringhomomorfi av (kommutative) ring mer 1. Da er*

$$\operatorname{Ker} f = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$$

et ideal i R.

Oppgave 4'. For en kommutativ ring R og et element $a \in R$, vis at

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

er et ideal i R.

2. Gruppearbeid B i 22F

Oppgave 5' (gjør denne helt til slutt). Vis følgende resultat:

En ikke-tom delmengde S av en ring R med 1 er en underring hvis og bare hvis

(i) $0, 1 \in S$,
(ii) $(a - b) \in S$ for alle $a, b \in S$,
(iii) $ab \in S$ for alle $a, b \in S$.

Oppgave 5. Vis følgende resultat:

Setning 86. *La* $f\colon R \to S$ *være en ringhomomorfi av (kommutative) ringer med* 1*. Da har vi følgende:*

(a) $\operatorname{Im} f = \{f(r) \mid r \in R\} \subseteq S$ *er en underring.*
(b) $\overline{f}\colon R/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$*, der*

$$\overline{f}(a + \operatorname{Ker} f) = f(a)$$

er en ringisomorfi.

Oppgave 6. La $F = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + \overline{1})$.

(a) Hvor mange elementer har F?
(b) Vis at F er en kropp.
(c) Vis at $\mathbb{Z}_2$ er en underkropp av F.
(d) Har $p(x) = x^2 + x + \overline{1}$ en rot i $\mathbb{Z}_2$? Har $p(x) = x^2 + x + \overline{1}$ en rot i F?
(e) Finn en multiplikativ generator for gruppen $(F \setminus \{0\}, \cdot)$.

Oppgave 7'. La

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) Har $p(x) = x^2 - 2$ en rot i $\mathbb{Q}$? Har $p(x) = x^2 - 2$ en rot i $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
(b) Vis at $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ er en kropp.
(c) Vis at $\mathbb{Q}$ er en underkropp av $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(d) Vis at $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ er isomorf med $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$.