1. Gruppearbeid A i 22F

Oppgave 1. La F være en kropp. For et gitt polynom $g(x) \in F[x]$ vis at

$$I = \{q(x)g(x) \mid q(x) \in F[x]\} = q(x)F[x]$$

er et ideal i $F[x]$. Vi skriver $I = (g(x))$.

Fasit. Vi har at $I \neq \emptyset$, siden $g(x) \in I$. La $f_1(x) = q_1(x)g(x), f_2(x) = q_2(x)g(x)\ inI$. Da er

$$f_1(x) - f_2(x) = q_1(x)g(x) - q_2(x)g(x) = (q_1(x) - q_2(x))g(x) \in I$$

for alle valg av $f_1(x)$ og $f_2(x)$. Spesielt følger det at I er lukket under additive inverser (velg $q_1(x) = 0$) og lukket under addisjon (velg $q_2'(x) = -q_2(x)$). I tillegg så er $0 = 0 \cdot g(x)$ i I, slik at av Setning 6 så er $(I, +)$ en undergruppe av $(F[x], +)$.

La $h(x) \in F[x]$ og $f(x) = q(x)g(x) \in I$. Da er

$$h(x) \cdot f(x) = h(x)(q(x)g(x)) = (h(x)q(x))g(x) \in I,$$

slik at $(g(x))$ er et ideal i $F[x]$.

Oppgave 2. Vis følgende resultat:

Setning 83. *La F være en kropp. Alle idealene i $F[x]$ er av formen $(g(x))$ for et polynom $g(x)$ i $F[x]$.*

Hint: Bruk divisjonsalgoritmen for polynomer.

Fasit. Vi har sett at $(g(x))$ er et ideal i $F[x]$ for alle $g(x) \in F[x]$.

Hvis $I = \{0\}$, så er $I = (0)$ og påstanden holder. La I være et ikke-null ideal i $F[x]$. Velg $0 \neq g(x) \in I$ av minst grad. La $f(x) \in I$. Da eksisterer $q(x), r(x) \in F[x]$ slik at

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

der $r(x) = 0$ eller $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$. Dette gir at

$$\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\in I} - \underbrace{q(x)g(x)}_{\in I}}_{\in I} = r(x).$$

Dette impliserer at $r(x) \in I$. Hvis $r(x) \neq 0$, så er $\deg r(x) < \deg g(x)$ og $r(x) \in I$. Dette er en selvmotsigelse per valg av $g(x)$. Dette viser at $I \subseteq (g(x))$. Siden $g(x) \in I$, så er $(g(x)) \subseteq I$, som gir at $I = (g(x))$. Dette fullfører beviset.

Oppgave 3. Vis følgende resultat:

Setning 84. *La $f\colon R \to S$ være en ringhomomorfi av (kommutative) ring mer* 1. *Da er*

$$\operatorname{Ker} f = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$$

et ideal i R.

Fasit. (i) Vi har at $0 \in \operatorname{Ker} f$, slik at $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.

(ii) Vet at $(\operatorname{Ker} f, +) \subseteq (R, +)$ er en undergruppe, siden f er en gruppehomomorfi.

(iii) La $r \in R$ og $a \in \operatorname{Ker} f$. Er $ra \in \operatorname{Ker} f$? Vi har

$$f(ra) = f(r)f(a) = f(r) \cdot 0_S = 0_S,$$

slik at $ra \in \operatorname{Ker} f$. Dette viser at $\operatorname{Ker} f$ er et ideal i R.

Oppgave 4'. For en kommutativ ring R og et element $a \in R$, vis at

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

er et ideal i R.

Fasit. (i) Vi har at $a \in aR$, slik at $aR \neq \emptyset$. La $ar_1, ar_2 \in aR$. Da er

$$ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2) \in aR$$

for alle valg av r_1 og r_2. Spesielt følger det at aR er lukket under additive inverser (velg $r_1 = 0$) og lukket under addisjon (velg $r_2' = -r_2$). I tillegg så er $0 = a \cdot 0$ i aR, slik at av Setning 6, så er $(aR, +)$ en undergruppe av $(R, +)$.

La $x \in R$ og $ar \in I$. Da er

$$x \cdot ar = x(ar) = (xa)r = (ax)r = a(xr) \in I,$$

siden R er en kommutativ ring, slik at aR er et ideal i R.