1. Gruppearbeid A i 21F

Oppgave 1. La $f(x) = 5x^3+4x^2+2$ og $g(x) = x^2+x+1$ i $\mathbb{R}[x]$. Bruk reduksjonstrinnet i divisjonsalgoritmen for polynomer i en variabel til å finne $q(x)$ og $r(x)$ slik at

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

der $r(x) = 0$ eller $\deg r(x) < \deg g(x) = 2$.

Fasit.

$$\begin{array}{r|l}
 & 5x - 1 \\
x^2+x+1 & 5x^3 + 4x^2 + 0x + 2 \\
 & -5x^3 - 5x^2 - 5x \\ \hline
 & -x^2 - 5x + 2 \\
 & x^2 + x + 1 \\ \hline
 & -4x + 3
\end{array}$$

Dette gir at $q(x) = 5x - 1$ og at $r(x) = -4x + 3$.

Oppgave 2. For en ring R vis at $R \subseteq R[x]$ er en underring.

Fasit.

Oppgave 3. Vis følgende resultat:

Setning 76. *La F være en kropp, $f(x)$ et polynom i $F[x]$ og $a \in F$. Da er a en rot i $f(x)$ hvis og bare hvis $f(x) = q(x)(x-a)$ for et polynom $q(x)$ i $F[x]$.*

Fasit. $\Rightarrow$: Anta at a er en rot i $f(x)$, dvs. $f(a) = 0$. Setning 75 impliserer at det eksisterer $q(x), r(x) \in F[x]$ slik at

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x),$$

der $r(x) = 0$ eller $\deg r(x) < 1$. Dette gir at $r(x) = c \in F$. Vi har at

$$\begin{aligned}
0 = f(a) = \varphi_a(f(x)) &= \varphi_a(q(x)(x-a) + r(x)) \\
&= \varphi_a(q(x)(x-a)) + \varphi_a(r(x)) \\
&= q(a)\underbrace{(a-a)}_{=0} + r(a) = c
\end{aligned}$$

Det følger fra dette at $c = 0$ og at $(x-a) \mid f(x)$.

$\Leftarrow$: Anta at $(x-a) \mid f(x)$, dvs. $f(x) = q(x)(x-a)$. Ser direkte at $f(a) = 0$, dvs. a er en rot i $f(x)$.

Oppgave 4. La F være en kropp. Finn alle enhetene i $F[x]$.

Fasit. La $f(x)$ og $g(x)$ være polynomer av grad henholdsvis n og m i $F[x]$ for en kropp F. Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er gjensidige inverser, dvs. $f(x)g(x) = 1$. Da kan ikke $f(x)$ eller $g(x)$ være lik null. Vi har at

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x) = \deg 1 = 0,$$

slik at $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$, siden graden til et ikke-null polynom er et ikke-negativt heltall. Dette viser at hvis $f(x)$ er en enhet i $F[x]$, så er $f(x)$ et ikke-null polynom av grad 0, eller ekvivalent $f(x) = c \in F \setminus \{0\}$.

Anta at $f(x) = c \in F \setminus \{0\}$. La $g(x) = c^{-1} \in F$, som vi vet eksisterer siden F er en kropp. Da er $f(x)g(x) = 1 = g(x)f(x)$, og $f(x)$ er en enhet i $F[x]$. Tilsammen viser dette at enhetene i $F[x]$ er alle ikke-null polynomer av grad 0.

Oppgave 5'. La E være en kropp, og la $F \subseteq E$ være en underkropp av E. For $\alpha \in E$ betrakt evalueringersavbildningen

$$\varphi_\alpha \colon F[x] \to E$$

gitt ved at $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$. Vis at φ_α er en homomorfier av ringer.

Fasit. La $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ og la $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$. Da er

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(f(x) + g(x)) &= \varphi_\alpha((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\alpha + \cdots + (a_n + b_n)\alpha^n \\
&= a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n + b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_n\alpha^n \\
&= \varphi_\alpha(f(x)) + \varphi_\alpha(g(x))
\end{aligned}$$

Videre er

$$\varphi_\alpha(f(x)g(x)) = \varphi_\alpha(d_0 + d_1 x + \cdots + d_{2n} x^{2n})$$

der $d_t = \sum_{i=0}^{t} a_i b_{t-i}$

$$\begin{aligned}
&= d_0 + d_1\alpha + \cdots + d_{2n}\alpha^{2n} \\
&= (a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_n\alpha^n) \\
&= \varphi_\alpha(f(x))\varphi_\alpha(g(x))
\end{aligned}$$

og

$$\varphi_\alpha(1_F) = 1_F.$$

Dette viser at φ_α er en homomorfi av ringer.

Oppgave 6'. La $\varphi_i\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ være evalueringshomomorfien gitt ved det komplekse tallet i.

(a) Vis at $\varphi_i(1+x^2) = 0$.
(b) Vis at $\varphi_i(f(x)(x^2+1)) = 0$ for alle polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.
(c) Hvis $f(x) = q(x)(x^2+1) + r(x)$, når er $f(i) = 0$?
(d) Vis at $\operatorname{Ker} \varphi_i = (x^2+1)\mathbb{R}[x]$.

Fasit. (a) Vi har at $\varphi_i(1+x^2) = 1 + i^2 = 1 + (-1) = 0$.

(b) Siden φ_i er en homomorfi av ringer, har vi at

$$\varphi_i(f(x)(x^2+1)) = \varphi_i(f(x))\varphi_i(x^2+1) = \varphi_i(f(x)) \cdot 0 = 0$$

for alle polynom $f(x)$ i $F[x]$.

(c) Igjen, siden φ_i er en homomorfi av ringer, har vi at

$$\varphi_i(q(x)(x^2+1)+r(x)) = \varphi_i(q(x)(x^2+1))+\varphi_i(r(x)) = 0+\varphi_i(r(x)) = r(i).$$

Dermed blir $\varphi_i(f(x)) = 0$ hvis og bare hvis $\varphi_i(r(x)) = r(i) = 0$.

(d) Vi har vist i (b) at $(x^2+1)\mathbb{R}[x] \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_i$. La $f(x)$ være et vilkårlig element i $\operatorname{Ker} \varphi_i$. Divisjonsalgoritmen for polynomer gir at det eksisterer polynomer $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ slik at

$$f(x) = q(x)(x^2+1) + r(x),$$

der $r(x) = 0$ eller $0 \leq \deg r(x) < \deg(x^2+1) = 2$. Vi får at $r(x)$ er et polynom av høyst grad 1, dvs. $r(x) = r_1 x + r_0$ med $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$. Fra (c) har vi at $f(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_i$ hvis og bare hvis $r(i) = r_1 i + r_0 = 0$. Dette skjer hvis og bare hvis $r_0 = r_1 = 0$, som medfører at $f(x) = q(x)(x^2+1)$ og at $\operatorname{Ker} \varphi_i \subseteq (x^2+1)\mathbb{R}[x]$. Tilsammen gir dette at $\operatorname{Ker} \varphi_i = (x^2+1)\mathbb{R}[x]$.

Oppgave 7': Utfordring. La F være en underkropp av en kropp E, og la $a \in E$. Anta at a er en rot i et ikke-null polynom i $F[x]$, og la $g(x)$ være et polynom i $F[x]$ av minst grad slik at a er en rot i $g(x)$. Vis at $\operatorname{Ker} \varphi_a = g(x)F[x]$.

Fasit. Tilsvarende som i forrige oppgave har vi at $g(x)F[x] \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_a$.

La $f(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_a$. Divisjonsalgoritmen for polynomer gir at det eksisterer polynomer $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ slik at

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

der $r(x) = 0$ eller $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$. Da har vi at

$$f(x) - q(x)g(x) = r(x).$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\varphi_a(f(x) - q(x)g(x)) &= \varphi_a(f(x)) - \varphi_a(q(x)g(x)) \\ &= 0 - \varphi_a(q(x))\varphi_a(g(x)) \\ &= 0 - \varphi_a(q(x)) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Siden $r(x) = f(x) - q(x)g(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_a$ og $\deg r(x) < \deg g(x)$ om $r(x) \neq 0$, så gir dette en selvmotsigelse. Følgelig er $r(x) = 0$ og $f(x) = q(x)g(x)$. Dette viser at $\operatorname{Ker} \varphi_a \subseteq g(x)F[x]$. Tilsammen med den første observasjonen får vi at $\operatorname{Ker} \varphi_a = g(x)F[x]$.