1. Gruppearbeid B i 19F

Oppgave 1.

(a) Beregn Eulers phi-funksjon av verdiene: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
(b) Beregn $\varphi(110341894140625) = \varphi(5^8 7^{10})$.

Fasit. (a) Vi har

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1\\ \varphi(2) &= 1\\ \varphi(3) &= 2\\ \varphi(4) &= 2\\ \varphi(5) &= 4\\ \varphi(6) &= 2\\ \varphi(7) &= 6\end{aligned}$$

(b) Vi har at $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ når $\gcd(m, n) = 1$. Dette gir at

$$\begin{aligned}\varphi(5^8 7^{10}) &= \varphi(5^8)\varphi(7^{10})\\ &= (5^8 - 5^7)(7^{10} - 7^9)\\ &= 5^8(1 - \frac{1}{5})7^{10}(1 - \frac{1}{7})\\ &= 5^8 \frac{4}{5} 7^{10} \frac{6}{7}\\ &= 24 \cdot 5^7 7^9\end{aligned}$$

Oppgave 2. Hva sier Eulers teorem når n er et primtall?

Fasit. For $n > 1$ og $a \in \mathbb{Z}$ med $\gcd(a, n) = 1$, så er

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Hvis p er et primtall, så er $\varphi(p) = p - 1$. Dette gir at Eulers teorem da sier

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p,$$

dvs. Fermats lille teorem.

Oppgave 3 (Gammel eksamensoppgave). Skriv ned definisjonen på Eulers phi-funksjon, og finn det siste sifferet i tallet $7^{1000000}$.

Fasit. Vi har at for $n \geq 1$ i $\mathbb{Z}$, så er

$$\varphi(n) = |\{r \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq r \leq n \text{ med } \gcd(r,n) = 1\}|.$$

Vi har at $\varphi(10) = 4$ og $\gcd(7,10) = 1$, slik at $7^4 \equiv 1 \mod 10$. Dette gir at

$$7^{1000000} = (7^4)^{250000} \equiv 1^{250000} = 1 \mod 10,$$

slik at det siste sifferet i tallet $7^{1000000}$ er 1.

Oppgave 4 (Gammel eksamensoppgave). Gi definisjonen av Eulers phi-funksjon, og finn resten vi får når vi deler 5^{1000} på 18.

Fasit. Vi har at for $n \geq 1$ i $\mathbb{Z}$, så er

$$\varphi(n) = |\{r \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq r \leq n \text{ med } \gcd(r,n) = 1\}|.$$

Vi har at

$$\varphi(18) = \varphi(2 \cdot 3^2) = \varphi(2)\varphi(3^2) = 6$$

og $\gcd(5,18) = 1$, slik at

$$5^6 \equiv 1 \mod 18.$$

Da har vi

$$\begin{aligned} 5^{1000} = (5^6)^{166} 5^4 &\equiv 1^{166} 25^2 \mod 18 \\ &\equiv 7^2 \mod 18 \\ &\equiv 13 \mod 18, \end{aligned}$$

dvs. resten er lik 13.