Gruppearbeid

Generelt ved gruppearbeid:

(1) Presentasjon av deltakerne, navn, studieprogram, kull.
(2) Velg en deltaker til å dele "whiteboard".
(3) Husk å spørre om alle er enige/er med, og husk å si i fra om du ikke skjønner noe eller har en annen måte å tenke på. I forelesningene skal vi lære og ikke prestere.

1. Gruppearbeid A i 18F

Oppgave 1. La

$$R = M_2(\mathbb{R}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Finn enhetene i R.

Oppgave 2. La R være en ring med 1. La

$$U(R) = \{u \in R \mid \ u \text{ en enhet i } R\}.$$

Vis at $U(R) = (U(R), \cdot)$ er en gruppe under multiplikasjonen i R.

Oppgave 3. For en ring R med 1 betrakt de følgende egenskapene for R:

(i) For alle $a, b \in R$ med $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ eller $b = 0$.
(ii) For alle $a, b \in R$ med $ab = ac$ og $a \neq 0 \Rightarrow b = c$.
(iii) For alle $a, b \in R$ med $ab = cb$ og $b \neq 0 \Rightarrow a = c$.

Vis at alle egenskapene (i)–(iii) er ekvivalente for en ring R.

Oppgave 4.

(a) Finn nulldivisorene in $\mathbb{Z}_{10}$.
(b) Finn enhetene i $\mathbb{Z}_{10}$.

Oppgave 5. Vis at $\overline{r}$ er en enhet i $\mathbb{Z}_n$ hvis og bare hvis $\gcd(r,n) = 1$.

Hint: Kan bruke de samme argumentene som i beviset for Setning 60.

2. Gruppearbeid B i 17F

Oppgave 6. La

$$R = \{\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

med vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon. Vi har sett at R er en kropp.

(a) Vis at R er isomorf med $\mathbb{C}$.
(b) Hvilken operasjon O svarer det å transponere en matrise til i $\mathbb{C}$?

Oppgave 7. La R være en kropp. Vis at R er et integritetsområde.

Oppgave 8. Vis at $\mathbb{Z}_n$ er et integritetsområde hvis og bare hvis $\mathbb{Z}_n$ er en kropp.

Oppgave 9. La $R = R_1 \times R_2$ være det direkte produktet av to ringer R_1 og R_2. Vis at

$$U(R) = U(R_1) \times U(R_2).$$

Oppgave 10. Definer

$$\psi\colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

ved at $\psi(\overline{a}_{mn}) = (\overline{a}_m, \overline{a}_n)$, der $\overline{a}_t$ betyr heltallet a modulo heltallet t.

(a) Vis at $\psi\colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ er en isomorfi av ringer når $\gcd(m, n) = 1$.

(b) Bruk Oppgave 9 til å vise at

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

når $\gcd(m, n) = 1$ og φ er Eulers phi-funksjon.

Utfordring. Vi har allerede fylt ut et liknende diagram. Nå er det en klasse ringer til. Fyll inn eksempler som tar hensyn til den nye klassen av ringer.