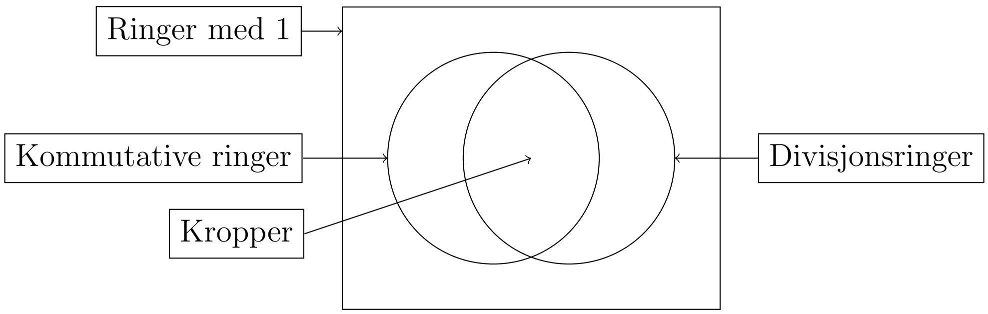
**Hovedoppgave/hovedmål.** Hovedmålet med oppgavene denne gangen er å fylle inn et eksempel i hvert område i diagrammet under. Fyll inn eksempler underveis i arbeidet med oppgavene.




## 1. Gruppearbeid B i 17F

**Oppgave 6.** La

$$R = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

med vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon.

(a) Vis at $R$ er en ring med 1. Hva er identitetselementet $1_R$ i $R$?
(b) Hvilke elementer i $R$ har en invers i $R$?
(c) Er $R$ en kommutativ ring? Er $R$ en kropp?
(d) Har likningen $x^2 + 1_R = 0$ en løsning $x$ i $R$?
(e) Hva *er* $R$?

**Fasit.** (a) Vi har at

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}.$$

Dette viser at $R$ er lukket under multiplikasjon. Argumentet for at $R$ er lukket under addisjon er ennå mer direkte. Siden matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon er assosiativ og tilfredsstiller de distributive lovene, følger det at $(R, +)$ er en abelsk gruppe og multiplikasjonen i $R$ er assosiativ og tilfredsstiller de distributive lovene. Identitetselementet med hensyn på multiplikasjonen er $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dette viser at $R$ er en ring.

(b) Siden multiplikasjonen i $R$ er den vanlige matrisemultiplikasjonen, så er et element i $R$ invertibelt hvis og bare hvis determinanten til elementet er forskjellig fra null og den inverse matrisen ligger i $R$. La $x = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Da er $\det(x) = a^2 + b^2$, som er forskjellig fra null hvis og bare hvis $x \neq 0$ i $R$. Videre er

$$x^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

som igjen er et element i $R$. Dette gir at alle elementer $x \neq 0$ i $R$ har en invers.

(c) Vi har at

$$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a - b'b & -a'b - b'a \\ b'a + a'b & -b'b + a'a \end{pmatrix},$$

som er det samme vi fikk for multiplikasjonen i motsatt rekkefølge. Dette viser at $R$ er en kommutativ ring med 1. Alle elementer forskjellig fra 0 har en invers, slik at $R$ er en kropp.

(d) Vi har at $\iota = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenskapen at

$$\begin{aligned} \iota^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1_R. \end{aligned}$$

Dette gir at $\iota$ er en løsning av likningen $x^2 + 1_R = 0$ i $R$.

(d) Ringen $R$ er $\mathbb{C}$.

**Oppgave 7.** La

$$R = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \}$$

med vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon, hvor $\overline{x}$ betegner den komplekse konjugerte av et komplekst tall $x$.

(a) Vis at $R$ er en ring med 1. Hva er identitetselementet $1_R$ i $R$?
(b) Hvilke elementer i $R$ har en invers i $R$?
(c) Er $R$ en kommutativ ring?
(d) Er $R$ en kropp?

**Fasit.** (a) Gjør som i forrige oppgave: Vis at $R$ er lukket under de binære operasjonene, matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon er assosiativ og tilfredsstiller de distributive lovene. Argumenter som i forrige oppgave for å vise at $R$ er en ring med 1 (som er identitetsmatrisen).

(b) Tilsvarende som i forrige oppgave så har alle elementer forskjellig fra null i $R$ en invers, dvs. $R$ er en divisjonsring.

(c) Vi har at
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
og
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$
Dette viser at $R$ ikke er en kommutativ ring.

(d) Siden $R$ ikke er en kommutativ ring, så er $R$ ikke en kropp, men kun en divisjonsring.