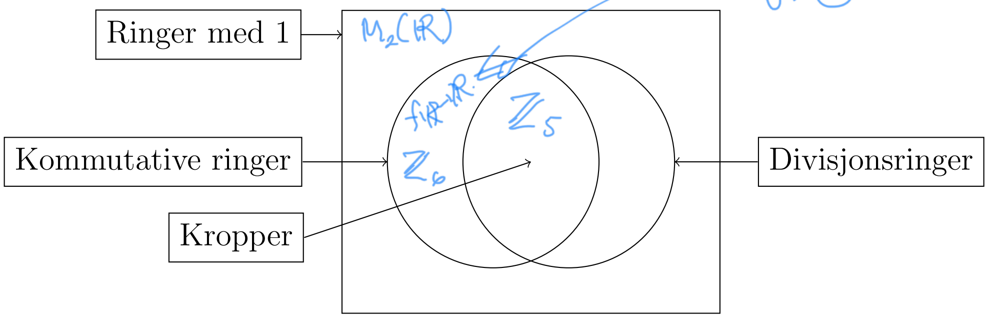
Hovedoppgave/hovedmål. Hovedmålet med oppgavene denne gangen er å fylle inn et eksempel i hvert område i diagrammet under. Fyll inn eksempler underveis i arbeidet med oppgavene.

oppgave 2.



1. Gruppearbeid A i 17F

Oppgave 1. La

$$R = M_2(\mathbb{R}) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}.$$

(a) Vis at R er en ring med 1 under vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon. Hva er identitetselementet med hensyn til multiplikasjonen?
(b) Avgjør om R er en kommutativ ring.
(c) Er R en divisjonsring?

Fasit. (a) Vi vet fra linear algebra at matriseaddisjon er assosiativ, alle matriser har en additiv invers, nullmatrisen er identitetselement med hensyn på addisjon, slik at $(R, +)$ er en gruppe. Vi vet også at matrisemultiplikasjon er assosiativ med identitetsmatrisen som et identitetselement (eller 1 i R), og at de distributive lovene holder for matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon. Dette viser at R er en ring. Merk at disse argumentene viser at enhver full matrisering $M_n(\mathbb{R})$ er en ring med 1.

(b) Vi har at

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette viser at R ikke er en kommutativ ring.

(c) Elementet $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ er forskjellig fra null. Siden vi har at

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

for alle matriser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, så kan ikke matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha noen invers. Dette gir at R ikke er en divisjonsring.

Oppgave 2. La

$$R = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ er en funksjon}\},$$

under addisjon og multiplikasjon gitt ved at

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{og} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

for alle $f, g \in R$ og $x \in \mathbb{R}$.

(a) Vis at R er en ring med 1. Hva er identitetselementet i R?
(b) Avgjør om R er en kommutativ ring.
(c) Er R en divisjonsring?

Fasit. (a) Siden den additive og den multiplikative strukturen i R er definert ved punktvis addisjon og punktvis multiplikasjon i $\mathbb{R}$ og addisjon og multiplikasjon i $\mathbb{R}$ er assosiativ og tilfredsstiller de distributive lovene, så vil addisjon og multiplikasjon i R være assosiativ og R vil tilfredsstille distributive lover. Konstantfunksjonen med verdi 0 overalt vil være identitetselement med hensyn på addisjonen i R, og konstantfunksjonen med verdi 1 overalt vil være identitetselement med hensyn på multiplikasjon i R. Additiv invers til en funksjon f er $-f$, slik at $(R, +)$ er en gruppe. Dette gir at R er en ring med 1.

(b) For f, g i R, så er

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette viser at R er en kommutativ ring.

(c) Funksjonen $f = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ har egenskapen at

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = 0 \cdot g(x)$$

for alle $x < 0$, slik at $fg \neq 1_R$ for alle $g \in R$. Dette gir at element f som er forskjellig fra 0-elementet i R, ikke har en invers i R. Følgelig er R ikke en divisjonsring.

Oppgave 3. La
$$R = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$$
med addisjon og multiplikasjon modulo 6 som to binære operasjoner.
(a) Vis at R er en ring med 1. Hva er identitetselementet i R?
(b) Avgjør om R er en kommutativ ring.
(c) Er R en divisjonsring?

Fasit. (a) Vi vet at $(R,+)$ er en abelsk gruppe. Vi har at addisjonen og multiplikasjonen i R er definert ved at
$$\overline{r} + \overline{s} = \overline{r+s} = \overline{s+r} = \overline{s} + \overline{r}$$
og
$$\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{rs}.$$
Siden addisjonen og multiplikasjonen i $\mathbb{Z}$ er assosiativ, kommutativ og tilfredsstiller de distributive lovene, så vil multiplikasjonen i R være assosiativ og tilfredsstille de distributive lovene. Elementet $\overline{1}$ er identitetselementet i R, slik at R blir en ring med 1.

(b) Vi har at
$$\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{rs} = \overline{sr} = \overline{s} \cdot \overline{r}.$$
Dette gir at R er en kommutativ ring.

(c) Vi har at
$$\overline{2} \cdot (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}) = (\overline{2}, \overline{4}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{4}).$$
Dette gir at $\overline{2}$ har ingen invers med hensyn på multiplikasjonen og at R er ingen divisjonsring.

Oppgave 4. Vis følgende setning.

Setning 57. *La R være en ring med 1 og 0 identitetselement med hensyn på $+$. Vis følgende for alle elementer $a, b \in R$:*
(a) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$.
(b) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.
(c) $(-a)(-b) = ab$.

Fasit. (a) Vi har at
$$0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$
Forkort $0 \cdot a$ fra ekstreme venstreside og ekstreme høyreside, og vi får at $0 = 0 \cdot a$.

(b) Vi vil vise at $(-a)b = -(ab)$. Husk at $x + a = 0$ i en gruppe, impliserer at $x = -a$. Vi har at
$$(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0 \cdot b = a,$$
som impliserer at $(-a)b = -(ab)$. Tilsvarende vises at $a(-b) = -(ab)$.

(c) Bruk egenskap (b) og at $-(-b) = b$.

Oppgave 5. Vis følgende resultat.

Lemma 58. *La R være en ring med 1. Da har R mer enn ett element hvis og bare hvis $1 \neq 0$.*

Fasit. $\Leftarrow$ Hvis $1 \neq 0$, så er det klart at R har minst to elementer.

$\Rightarrow$ Per antakelse så eksisterer det en $a \in R \setminus \{0\}$, dvs. $a \neq 0$. Vi har at

$$a \cdot 1 = a \neq 0 = a \cdot 0$$

Dette medfører at 0 og 1 ikke kan være like hverandre.