16. Gruppevirkninger

Def: La G være en gr og X er mengde. En <u>gruppevirkning</u> på X (fra G) er en funksjon $G \times X \longrightarrow X$ (skriver $(g,x) \mapsto gx$) slik at

$$(1) \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) \quad \forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$$

$$(2) \quad ex = x \quad \forall x \in X$$

Mengden X er da en <u>G-mengde</u>.

Eksempler: (1) La $X = \{1, 2, \dots, n\}$ og $G = S_n$. Da virker G på X ved

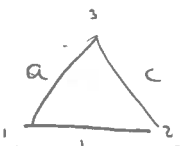
$$\sigma m \overset{\text{def}}{=} \sigma(m) \qquad \sigma \in S_n,\ m \in X.$$

(2) La $X = \mathbb{R}$ og $G = \mathbb{Z}_2$. Definer

$$gx \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{hvis } g = 0 \\ -x & \text{hvis } g = 1 \end{cases}$$

Da er $0x = x$ og $(g_1 +_2 g_2)x = g_1(g_2 x)$ (sjekk det siste).

(3) La $G = S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$.



La X = mengden som består av de tre sidekantene i trangelet $= \{a, b, c\}$

Da virker G på X. F.eks er

$$\rho_1 a = b, \quad \rho_1 b = c, \quad \rho_1 c = a$$

$$\mu_1 a = b \quad \mu_1 b = a \quad \mu_1 c = c$$

Def: G virker <u>transitivt</u> på X hvis $\forall x_1, x_2 \in X$ finnes minst ét $g \in G$ med $x_2 = g x_1$.

Eksempler: (1) Virkningene i eks. (1) og (3) er transitive.

(2) Virkningen i eks (2) er ikke trans: for $g \in \mathbb{Z}_2$ er $g0 = 0$, så det finnes ingen $g \in \mathbb{Z}_2$ med $4 = g0$.

Def: For $x \in X$ og $g \in G$:

$$G_x = \{h \in G \mid hx = x\} \subseteq G$$

$$X_g = \{y \in X \mid gy = y\} \subseteq X$$

Eksempler: (1) $X = \{1,2,3\}$, $G = S_3$

$$(S_3)_2 = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma 2 = 2\} = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(2) = 2\}$$
$$= \{\rho_0, \mu_2\} \qquad \text{tilsv: } (S_3)_i = \{\rho_0, \mu_i\} \quad \underline{\text{undergr av } S_3}$$

$$X_{\rho_1} = \{x \in X \mid \rho_1(x) = x\} = \phi$$
$$X_{\mu_1} = \{x \in X \mid \mu_1(x) = x\} = \{1\}$$

Merk: (1) Generelt er $X_e = \{x \in X \mid ex = x\} = X$ (e id-elt i G)

(2) Kan ha $X_g = \phi$

<u>Teorem 16.12</u> G_x er en undergr av G $\forall x \in X$

Bevis: La $g_1, g_2 \in G_x$. Siden $g_2 \in G_x$ er $g_2 x = x$, så vi får

$$g_2^{-1} x = g_2^{-1}(g_2 x) = (g_2^{-1} g_2) x = ex = x$$

dvs $g_2^{-1} \in G_x$. Derfor:

$$(g_1 g_2^{-1}) x \overset{\text{def}}{=} g_1(g_2^{-1} x) \overset{g_2^{-1} \in G_x}{=} g_1 x \overset{g_1 \in G_x}{=} x$$

Dvs: $\forall g_1, g_2 \in G_x$ er $g_1 g_2^{-1} \in G_x$. Da er G_x en undergr av G. □

Def: (1) For $x \in X$ kalles G_x <u>isotropi-undergruppen</u> til x.

(2) La $x \in X$. <u>Banen</u> til x er mengden $Gx \overset{\text{def}}{=} \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$

Eksempler: (1) Anta G virker transitivt på X. Da er $Gx = X$ $\forall x \in X$.

(2) $G = \mathbb{Z}_2$, $X = \mathbb{R}$, $gx = \begin{cases} x & g=0 \\ -x & g=1 \end{cases}$

For alle $x \in X$ er da $\mathbb{Z}_2 x = \{x, -x\}$. Eks: $\mathbb{Z}_2 \pi = \{-\pi, \pi\}$.

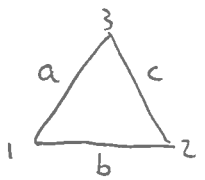
<u>Teorem 16.16</u> For alle $x \in X$ er $|Gx| = (G : G_x)$. (kan være ∞)

Bevis: Bok

Eksempel: $G = S_3$, $X = \{a,b,c\}$. Her da $(S_3)m = X$ $\forall m \in X$ (transitiv virkning)

La $x = a$. Her $(S_3)a = \{\rho_0, \mu_2\} \Rightarrow (S_3 : (S_3)_a) = 3$

$$3 = |X| = (S_3)a = (S_3 : (S_3)_a) = 3$$



Merk: (1) For $x_1, x_2 \in X$ har vi (vis!)

$$x_2 \in Gx_1 \iff Gx_2 = Gx_1 \iff x_1 \in Gx_2$$

(2) Definer relasjon på X ved

$$x_1 \sim x_2 \overset{def}{\iff} x_2 \in Gx_1$$

Dette er en ekvivalensrelasjon (vis!)

(3) Følgende er ekv:

(i) G virker transitivt på X

(ii) $\exists\, x \in X$ med $Gx = X$

(iii) $Gx = X \quad \forall\, x \in X$

(iv) X har kun én ekv.klasse for relasjonen i (2), nemlig X selv.