13. Homomorfier

Def: En funksjon $\phi: G \to H$ mellom to grupper er en (gruppe)homomorfi dersom

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

Merk: (1) Produktet $g_1 g_2$ er bin.op. i G, mens produktet $\phi(g_1)\phi(g_2)$ er bin.op. i H.

(2) Strukturbevarende

(3) Spesialtilfelle: ϕ isomorfi $\iff \phi$ er (i) gruppehom (ii) injektiv (iii) surjektiv

(4) Ved å bruke def. iterativt: $\phi(g_1 g_2 \cdots g_n) = \phi(g_1)\phi(g_2)\cdots\phi(g_n)$

Eksempler: (1) La G, H være tilfeldige grupper, og $e' \in H$ id.elt i H. Definer

$$\phi(g) = e' \quad \forall\, g \in G.$$

$$\Longrightarrow \phi(g_1)\phi(g_2) = e' \cdot e' = e' = \phi(g_1 g_2) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

Derfor: $\forall$ grupper G, H finnes minst én gruppehom. $G \xrightarrow{\phi} H$.

(2) $GL(n, \mathbb{R})$ og $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ er multiplikative grupper. Definer

$$\phi: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$M \longmapsto \det(M)$$

$$\Longrightarrow \phi(MN) = \det(MN) = \det(M)\det(N) = \phi(M)\phi(N)$$

(3) $M_t(\mathbb{R})$ og $\mathbb{R}$ er additive grupper. Definer

$$\phi: M_t(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto tr(M) = \text{trasen av } M$$

$$\Longrightarrow \phi(M+N) = tr(M+N) = tr(M) + tr(N) = \phi(M) + \phi(N)$$

(4) $P^n_{\mathbb{R}}(x) = \{p(x) \mid p \text{ polynom med } \deg p \leq n\} = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. er er additiv gruppe for alle $n \in \mathbb{N}$. To gruppehom:

$$\phi: P^n_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow P^{n-1}_{\mathbb{R}}(x)$$
$$p(x) \longmapsto p'(x)$$

$$\psi: P^n_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow P^{n+1}_{\mathbb{R}}(x)$$
$$p(x) \longmapsto \int_0^x p(t)\,dt$$

(5) $\phi: S_n \longrightarrow S_{n+1}$ gitt ved

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) & n+1 \end{array}\right)$$

(6) $\mathbb{R}$ er additiv, $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ er multiplikativ.

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow U$$
$$r \longmapsto e^{ri}$$

$$\Longrightarrow \phi(r+s) = e^{(r+s)i} = e^{ri}e^{si} = \phi(r)\phi(s)$$

(7) La $a \in \mathbb{Z}$ var fiksert. Definer

$$\phi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto an$$

$$\Longrightarrow \phi_a(m+n) = a(m+n) = am + an = \phi_a(m) + \phi_a(n)$$

Oppgave: (1) Vis at enhver gruppehom $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ må være på formen ϕ_a for en $a \in \mathbb{Z}$.

(2) ϕ_a er en isomorfi $\Longleftrightarrow$?

Merk: Komposisjon av gruppehom. gir ny gruppehom:

$$G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} K$$

gir $\psi\phi : G \longrightarrow K$:

$$[\psi\phi](g_1 g_2) = \psi(\phi(g_1 g_2)) \overset{\phi \text{ hom}}{=} \psi(\phi(g_1)\phi(g_2)) \overset{\psi \text{ hom}}{=} \psi(\phi(g_1))\psi(\phi(g_2))$$
$$= [\psi\phi](g_1)[\psi\phi](g_2)$$

Eksempler: (1) La $G_1, \dots, G_n$ var gr. For hver $1 \le i \le n$ to hom:

$$\pi_i : G_1 \times \dots \times G_n \longrightarrow G_i$$
$$(g_1, \dots, g_i, \dots g_n) \longmapsto g_i$$

$$\phi_i : G_i \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_n$$
$$g \longmapsto (1_{G_1}, \dots, g, \dots, 1_{G_n})$$

$$\Longrightarrow \pi_i \phi_i = id_{G_i}$$

(2) $\phi : P^2_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow P^3_{\mathbb{R}}(x)$ gitt ved $\phi(p(x)) = \int_0^x p(t)\,dt$

$\psi : P^3_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow P^2_{\mathbb{R}}(x)$ gitt ved $\psi(q(x)) = q'(x)$

Hva blir $\psi\phi : P^2_{\mathbb{R}}(x) \to P^2_{\mathbb{R}}(x)$ og $\phi\psi : P^3_{\mathbb{R}}(x) \to P^3_{\mathbb{R}}(x)$?

Teorem 13.12 La $\phi: G \to H$ var en gruppehom.

(1) Hvis $e \in G$ er id-elt i G er $\phi(e)$ id-elt i H

(2) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ $\forall g \in G$

(3) $K \leq G$ undergr $\Rightarrow$ $\phi[K] = \{\phi(k) \mid k \in K\} \leq H$ undergr

(4) $L \leq H$ undergr $\Rightarrow$ $\phi^{-1}[L] = \{g \in G \mid \phi(g) \in L\} \leq G$ undergr

Bevis: Bok.

Merk: La $\phi: G \to H$ gruppehom, og $e \in G$ og $e' \in H$ id-eltene. Vet fra T.13.12 (1) at $\phi(e) = e'$.

Def: $\operatorname{Ker}\phi \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \phi(g) = e'\}$ er <u>kjernen</u> til ϕ.

Merk: $\operatorname{Ker}\phi$ er en undergr. av G: se på undergruppen $\{e'\} \leq H$. Siden $\operatorname{Ker}\phi = \phi^{-1}[\{e'\}]$ gir T.13.12(4) at $\operatorname{Ker}\phi \leq G$.

Eksempler: (1) $\phi: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ gitt ved $M \longmapsto \det(M)$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}\phi = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \phi(M) = 1\}$$
$$= \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$
$$= SL(n, \mathbb{R})$$

(2) $\phi: \mathbb{R} \to U$ gitt ved $r \mapsto e^{ri}$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}\phi = \{r \in \mathbb{R} \mid 1 = e^{ri}\} = \pi 2 \mathbb{Z}$$

Korollar 13.18 $\phi: G \to H$ gruppehom:

$$\phi \text{ injektiv} \iff \operatorname{Ker}\phi = \{e\}$$

Bevis: Anta ϕ inj, og la $g \in \operatorname{Ker}\phi$. Siden vi vet at $e \in \operatorname{Ker}\phi$ må da $\phi(g) = \phi(e)$ (= id-elt i H). Injektivitet gir $g = e$.

Anta ϕ ikke inj. Da finnes $g_1 \neq g_2$ med $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, som gir $e' = \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = \phi(g_1)\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1 g_2^{-1})$. Da er $g_1 g_2^{-1} \in \operatorname{Ker}\phi$, og $g_1 g_2^{-1} \neq e$ (hver for seg). $\square$

Def: En undergr $H \leq G$ er <u>normal</u> dersom $gH = Hg$ $\forall g \in G$

Korollar 13.20 For en gruppehom $\phi: G \to H$ er $\operatorname{Ker}\phi$ en normal undergr av G.