Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2201/TMA4150
Vår 2018

Løsningsforslag — Øving 7

Seksjon 18

18 Et element i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ er et trippel (a, q, b), der $a, b \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$. Anta nå at dette trippelet har en invers c, p, d. Da er altså $ac = bd = 1$ og $pq{=}1$. Følgelig er a og b enheter i Z og må dermed være lik ± 1. q er en enhet i $\mathbb{Q}$, og siden $\mathbb{Q}$ er en kropp betyr det bare at $q \neq 0$.

Vi får altså enhetene i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ er

$$(1, q, 1) \qquad (1, q, -1) \qquad (-1, q, 1) \qquad (-1, q, -1)$$

der $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$.

Seksjon 19

1 For å forstå oppgaven ed det lurt å først lese eksempel 19.1. Den greieste metoden for å finne alle røtter er nok å sjekke elementene i $\mathbb{Z}_{12}$.

Røttene er -4, -3, -1, 0, 3 og 5

2 Siden både 7 og 23 er primtall er $\mathbb{Z}_7$ og $\mathbb{Z}_{23}$ begge kropper. Derfor kan vi bruke kanselleringslovene; det vil si at vi kan skrive $x = 3^{-1}2$.

Vi ser først på $\mathbb{Z}_7$. Der er $3^{-1} = 5$. Dermed har vi at $x = 5 \cdot 2 = 3$.
Vi ser så på $\mathbb{Z}_{23}$. Der er $3^{-1} = 8$. Dermed har vi at $x = 8 \cdot 2 = 16$.

23 La R være en divisjonsring, og la $a \in R$ være idempotent, det vil si at $a^2 = a$. Da har vi at $a(a-1) = a^2 - a = 0$. R kan ikke inneholde nulldivisorer, altså må enten $a = 0$ eller så må $a - 1 = 0$, og dermed $a = 1$. Altså inneholder R kun to idempotente elementer, nemlig 0 og 1.

Eksamensoppgaver

V2011, oppgave 5

a) $|X| = 5! = 120$
Vi ser fra aksiomene for gruppevirkning[1] at S_5 har en gruppevirkning på X. Videre ser vi at det kun finnes en bane for denne gruppevirkningen, for

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \\ \cline{1-2}\end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

b) Gitt at $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ så er også $\sigma_1\sigma_2 \in G$. I tillegg er identitetselementet i G. Dermed er G en undergruppe av S_5.

$$|G| = |\{\text{permutasjoner på } \{1,2,3\}\}| \cdot |\{\text{permutasjoner på } \{4,5\}\}| = 12.$$

Siden elementer G må ha elementer fra {1,2,3} og {4,5} i disjunkte sykler, mistenker vi at en konjugasjon med en transposisjon mellom de to settene ikke vil være i G (dette er en typisk ting du vil opparbeide deg intuisjon for etterhvert). Vi velger $(1,2) \in G$ og $(1,5) \in S_5$. Vi regner ut at

$$(1,5)(1,2)(1,5)^{-1} = (1,5)(1,2)(1,5) = (2,5) \notin G.$$

G er dermed ikke normal.

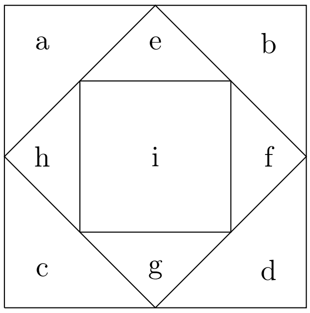
c) La $(a_1, \ldots, a_r)$ være en sykel i σ, og merk at

$$\gamma\sigma\gamma^{-1}(\gamma(a_i)) = \gamma\sigma(a_i) = \begin{cases} \gamma(a_0) & i = r \\ \gamma(a_{i+1}) & i \neq r \end{cases}$$

[1] På eksamen bør du skrive opp disse!

Det følger at $(\gamma(a_1), \gamma(a_2), \ldots \gamma(a_r))$ er en sykel i $\gamma\sigma\gamma^{-1}$.
Anta at $\sigma = (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2)$ og $\sigma' = (c_1, c_2, c_3)(d_1, d_2)$. La γ være permutasjonen som sender a_i på c_i og b_i på d_i. Da er $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma'$ (dette krever minimalt med utregning, se forrige del-deloppgave).
Gitt et element σ, finner vi σ^{-1} ved å snu de disjunkte syklene i σ. Følgelig har σ^{-1} samme antall sykler som σ, og disse syklene er av samme lengde som syklene til sigma. Da ser vi fra argumentet over at σ og σ^{-1} er konjugerte elementer.

V2012, oppgave 3 Vi starter med å tegne opp figuren og navngi de ulike flatene:



a) Symmetrigruppen til denne figuren er D_4, symmetrigruppen på et kvadrat. Vi vil bruke samme notasjon som boken gjør i eksempel 8.10 (og videre utover).

b) Dette er en oppgave som lukter Burnsides formel! Her er gruppen $G = D_4$, og X er mengden av alle fargelegginger av figuren. Siden figuren har ni flater som hver kan fargelegges med en av fire farger er $|X| = 4^9$. Vi regner nå ut isotropimengdene til de ulike symmetriene:

$g \in D_4$	$\lvert X_g \rvert$	forklaring
ρ_0	4^9	Alle flater kan velge farge fritt.
ρ_1	4^3	a, b, c, d må ha samme farge, e,f,g,h må ha samme farge, i velger fritt.
ρ_2	4^5	To og to motstående flater må ha samme farge, i velger fritt.
ρ_3	4^3	Som ρ_1
μ_1	4^6	a og b, c og d, f og h må ha samme farge. Resten velger fritt.
μ_2	4^6	a og c, b og d, e og g må ha samme farge. Resten velger fritt.
δ_1	4^6	b og c, e og h, f og g må ha samme farge. Resten velger fritt.
δ_2	4^6	a og d, e og f, g og h må ha samme farge. Resten velger fritt.

Fra burnsides formel får vi da at antall baner, det vil si antall distinkte farvelegginger opp til symmetri, er 34960.