Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

Seksjon 14

34 La $|G| = n < \infty$ og la $H \leq G$ være eneste undergruppe av G av orden m.

La $g \in G$, og betrakt $K = gHg^{-1}$. K er en undergruppe av G (se siste avsnitt av seksjon 14). Siden K har orden m må $gHg^{-1} = K = H$. Følgelig er H en normal undergruppe.

37 **a)** Vi lar $A = \{\phi : G \to G | \phi \text{ er en gruppeisomorfi}\}$. Mengden A er lukket under komposisjon av funksjoner, siden komposisjonen av to bijeksjoner er en bijeksjon, og komposisjonen av to homomorfier er en homomorfi. Vi sjekker så gruppeaksiomene:

Assosiativ Oppfylt fordi sammensetningen av funksjoner er assosiativt.

Identitetselement Identitetshomomorfien $\iota : G \to G$ fungerer som identitetselement i A

Inverser Anta at $\phi \in A$. Siden ϕ er en bijeksjon, har den en invers ψ; vi må sjekke at denne inversen er en homomorfi (den er automatisk en bijeksjon). Vi ser at

$$\phi(\psi(xy)) = xy = \phi(\psi(x))\phi(\psi(y)) = \phi(\psi(x)\psi(y)).$$

Dermed er $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, så ψ er en homomorfi.

b) La I være mengden av indre automorfier. Vi sjekker aksiomene for undergrupper:

Lukket

$$(i_g \circ i_h)(x) = i_g(i_h(x)) = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = i_{gh}(x)$$

for alle $x \in G$. Dermed er $i_g \circ i_h = i_{gh} \in I$.

Identitet i_e er identitetsautomorfien.

Invers $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}} \in I$

For å undersøke om I er en normal undergruppe, lar vi $i_g \in I$, $\phi \in A$ og $x \in G$:

$$(\phi \circ i_g \circ \phi^{-1})(x) = \phi(g\phi^{-1}(x)g^{-1}) = \phi(g)x\phi(g)^{-1} = i_{\phi(g)}(x),$$

og dermed er $\phi i_g \phi^{-1} = i_{\phi(g)} \in I$, og I er en normal undergruppe.

$\boxed{39}$ La G og G' være grupper, og la $H \leq G$ og $H' \leq G'$. La $\phi : G \to G$ være en homomorfi slik at $\phi[H] \subseteq H'$.

Vi blir bedt om å vise at det eksisterer en *naturlig homomorfi* $\phi_* : G/H \to G'/H'$, så vårt første problem er å finne ut hva denne ϕ_* skal være! At ϕ_* beskrives som naturlig, indikerer at det kun bør finnes en åpenbar definisjon for ϕ_*. Vi vet at ϕ_* skal ta et element $gH \in G/H$ til et element $g'H' \in G'/H'$. Vi prøver derfor med

$$\phi_*(gH) = \phi(g)H'.$$

Neste steg er nå å sjekke at ϕ_* er en veldefinert avbildning, det vil si at den er uavhengig av valget av representant for gH. Anta at $gH = g'H$; da kan vi skrive $g' = gh$ for en $h \in H$. Vi har at

$$\phi_*(g'H) = \phi(g')H' = \phi(gh)H' = \phi(g)\phi(h)H' = \phi(g)H,$$

der den siste likheten kommer av at $\phi[H] \subseteq H'$. ϕ_* er altså veldefinert.

Til slutt må vi sjekke at ϕ_* er en homomorfi. Vi regner ut:

$$\begin{aligned}\phi_*((gH)(g'H)) &= \phi_*(gg'H) = \phi(gg')H' \\ &= \phi(g)\phi(g')H' = (\phi(g)H')(\phi(g')H') = \phi_*(gH)\phi_*(g'H).\end{aligned}$$

Seksjon 15

$\boxed{35}$ La $\phi : G \to G'$ være en gruppehomomorfi, og la $N \trianglelefteq G$ være en normal undergruppe. Vi vet at $\phi[N]$ er en undergruppe av $\phi[G]$ (se teorem 13.12), men vi må sjekke at den er en normal undergruppe.

La $\phi(g) \in \phi[G]$ og la $\phi(n) \in \phi[N]$. Da har vi at

$$\phi(g)\phi(n)\phi(g)^{-1} = \phi(gng^{-1}) \in \phi[N],$$

så $\phi[N]$ er en normal undergruppe.

$\boxed{36}$ La $\phi : G \to G'$ være en gruppehomomorfi, og la $N' \trianglelefteq G'$ være en normal undergruppe. Vi vet at $\phi^{-1}[N']$ er en undergruppe av G (se teorem 13.12), men vi må sjekke at den er en normal undergruppe.

La $g \in G$, $n \in \phi^{-1}[N']$. Siden $\phi(n) \in N'$ har vi at

$$\phi(gng^{-1}) = \phi(g)\phi(n)\phi(g)^{-1} \in N',$$

så $gng^{-1} \in \phi^{-1}[N']$, så $\phi^{-1}[N']$ er en normal undergruppe av G.

Seksjon 16

$\boxed{2}$ Fasit:

$$
\begin{aligned}
&G_1 = \{\rho_0, \delta_2\} = G_3 = G_{P_1} = G_{P_3} && G_2 = \{\rho_0, \delta_1\} = G_4 = G_{P_2} = G_{P_4} \\
&G_{S_1} = \{\rho_0, \mu_1\} = G_{S_3} && G_{S_2} = \{\rho_0, \mu_2\} = G_{S_4} \\
&G_{m_1} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} = G_{m_2} && G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\} = G_{d_2} \\
&G_C = G
\end{aligned}
$$

$\boxed{11}$ La G være en gruppe og la X være en G-mengde. Vi skal vise at

"G har en trofast virkning på X"$\Leftrightarrow$"Alle elementer i G virker forskjellig på X".

Vi viser denne ekvivalensen ved å vise begge implikasjoner.

"$\Rightarrow$"Anta at G virker trofast på X og anta at $g, h \in G$ er slik at $gx = hx$ for alle $x \in X$.
Da er $(g^{-1}h)(x) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$ for alle $x \in X$. Dermed må $gh^{-1} = e$, så $g = h$.
"$\Leftarrow$"Anta at G ikke virker trofast på X; da finnes det et element $g \in G$, $g \neq e$ slik at $gx = x$ for alle $x \in X$. Da er $gx = ex$ for alle $x \in X$.

$\boxed{13}$ Vi lar $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}^2$, og definerer virkningen av et element $\theta \in G$ på $(x, y) \in X$ ved

$$\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, y\cos\theta + x\sin\theta)$$

a) For å se at dette er en gruppevikning, sjekker vi aksiomene i definisjon 16.1:

1. $0(x, y) = (x, y)$ (Fåes ved innsetting)
2. $(\theta + \phi)(x, y) = \theta(\phi(x, y))$. Dette kan vi bekrefte ved å betrakte virkningen geometrisk; å rotere et punkt $\theta + \phi$ radianer om origo, er det samme som først å rotere det ϕ radianer og så θ radianer. Eventuelt kan man regne det hele ut med trigonometriske identiteter.

b) Vi setter punktet $P = (x_P, y_P)$.

$$
\begin{aligned}
GP &= \{\theta(P) | \theta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_P\cos\theta - y_P\sin\theta, y_P\cos\theta + x_P\sin\theta) | \theta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |Q| = |P|\}.
\end{aligned}
$$

GP er altså sirkelen med radius $|P|$.

$$G_P = \{\theta \in \mathbb{R} | \theta(P) = P\} = \{n2\pi | n \in \mathbb{Z}\}$$

Seksjon 17

1 Vi har lyst til å bruke Burnside's formel:

$$(\text{Antall baner i } X \text{ under } G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} X_g,$$

så vi begynner med å finne de ulike leddene i formelen.

$$\begin{aligned} G &= \langle(1,3,5,6)\rangle = \{(1,3,5,6),(1,5)(3,6),(1,6,5,3),(1)\} \\ |G| &= 4 \\ |X_g| &= \begin{cases} 8 & g=(1) \qquad \text{Alle elementer blir holdt stille} \\ 4 & g\neq(1) \qquad \text{2,4,7,8 blir holdt stille} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi setter så inn i formelen:

$$(\text{Antall baner}) = \frac{1}{4}(8+4+4+4) = 5$$

4 Se eksempel 17.3. Svaret er 840.

6 Vi ser på en kube, og vi vet fra før at rotasjonsgruppen på kuben, G, inneholder 24 elementer.

Vi har fire farger, og skal male de åtte hjørnene på kuben. Før vi tar hensyn til at noen fargelegginger egentlig er like (hvis vi bare roterer kuben), har vi altså 4^8 fargelegginger; mengden av alle disse fargeleggingene er X.

Noen av disse fargeleggingene kan som sagt roteres over i hverandre (om vi for eksempel maler de fire hjørnene på toppen røde og de fire på bunnen blå, vil det kunne roteres over i fargeleggingen der de fire hjørnene på bunnen er røde, og de fire på toppen blå). Hvis to fargelegginger er slik, så vil de ligge i samme *bane* under virkningen av rotasjonsgruppen G på mengden av fargelegginger X. Men å telle baner kan vi, ved hjelp av Burnsides formel! Vi vet at $|G| = 24$, så nå må vi gå igjennom de ulike rotasjonene i G og telle hvor mange fargelegginger som forblir invariante under hver rotasjon (jeg anbefaler sterkt å finne en terning her!):

Rotasjon	Antall	$\lvert X_g\rvert$	Forklaring
Identitetsrotasjon	1	4^8	Alle fargelegginger er bevart
Om en akse gjennom to motstående sider, 90 eller 270 grader.	6	4^2	Hjørnene inntil hver side aksen går gjennom må ha samme farge
Om en akse gjennom to motstående sider, 180 grader.	3	4^4	To og to hjørner må ha samme farge.
Om en akse gjennom to motstående hjørner, 120 eller 240 grader.	8	4^4	De to hjørnene aksen går gjennom kan velge farge fritt. Ellers må tre og tre hjørner ha samme farge.
Om en akse gjennom to motstående kanter, 180 grader	6	4^4	To og to hjørner må ha samme farge.

Altså får vi at

$$(\text{antall fargelegginger}) = \frac{1}{24}(4^8 + 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^4 + 6 \cdot 4^4) = 2916$$

Eksamensoppgaver

Kont 2007, 1 **a)** Det finnes tre ulike abelske grupper av orden 8, nemlig $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, og $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Vi kan observere at $(1, 1)$ eller $(0, 1)$ vil være en generator for faktorgruppa, som dermed er syklisk. Da må vi ha $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8/\langle(1, 2)\rangle \cong \mathbb{Z}_8$.
Eventuelt kan vi se at $\phi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \to Z_8$ gitt ved $\phi(m, n) = n - 2m$ er en homomorfi med kjerne $\langle 1, 2\rangle$, og bruke fundamentalteoremet for homomorfier.

Høst 2009, 1 **a)** Det finnes 7 undergrupper av orden 2, og hver av de er generert av ett element $a \neq (0, 0, 0)$
Det finnes 7 undergrupper av orden 4, og de er alle generert av to elementer a, b der $a \neq b$ og $a \neq (0, 0, 0) \neq b$. (Man har 7 valg for element a og 6 valg for element b, men må ta hensyn til at $\langle\{a, b\}\rangle = \langle\{b, a\}\rangle$, og at for $(0, 0, 0) \neq c \in \langle\{a, b\}\rangle$ er $\langle\{a, b\}\rangle = \langle\{a, c\}\rangle = \langle\{b, c\}\rangle$

b) La $g, h \in G$. Vi ser da at

$$\begin{aligned}(gh)(gh) &= e\\ g(gh)(gh)h &= gh\\ (g^2)hg(h^2) &= gh\\ hg &= gh.\end{aligned}$$

c) La G være endelig av orden m. Siden G er abelsk, vet vi at G er isomorf med en gruppe på formen $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}}$ der $p_1, \cdots, p_r$ er primtall (ikke nødvendigvis unike) og $n_1, \cdots, n_r$ er positive heltall
Siden alle elementer i G unntatt identiteten har orden 2, ser vi at $2 = p_1 = \cdots = p_r$ og $1 = n_1 = \cdots = n_r$.

Kont 2009 2010, 1 **a)** Det finnes fem ikke-isomorfe abelske grupper av orden 16:

$$\mathbb{Z}_{16} \qquad \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

b) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \trianglerighteq \langle(2, 0)\rangle = \{(2, 0), (4, 0), (0, 0)\} =$. $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8)/\langle(2, 0)\rangle$ inneholder derfor 16 elementer. Vi skriver opp disse elementene og ordenen deres (for enkelhets skyld setter vi $H = \langle(2, 0)\rangle$)::

element	H	(1,0)+H	(0,1)+H	(1,1)+H
orden	1	2	8	8
element	(0,2)+H	(1,2)+H	(0,3)+H	(1,3)+H
orden	4	4	8	8
element	(0,4)+H	(1,4)+H	(0,5)+H	(1,5)+H
orden	2	2	8	8
element	(0,6)+H	(1,6)+H	(0,7)+H	(1,7)+H
orden	4	4	8	8

Siden faktorgruppen har elementer av orden 8, men ikke av orden 16, må den være isomorf til $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$.

Eventuelt kan man finne en morfisme $\phi : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ med H som kjerne; $\phi(m, n) = (m \mod 2, n)$ er et eksempel.