Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

Med forbehold om feil. Gi gjerne beskjed til mads.sandoy alfakrøll ntnu.no hvis en finner noen.

Kapittel 34

$\boxed{3}$ Se svaret i teksten, side 491 og utover.

$\boxed{7}$ La $x \in H \cap N$ og la $h \in H$. Siden $x \in H$ og H er en undergruppe, vet vi at $hxh^{-1} \in H$. Siden $x \in N$ og N er normal i G, vet vi at $hxh^{-1} \in N$. Følgelig er $hxh^{-1} \in H \cap N$, slik at $H \cap N$ er normal i H.

$\boxed{9}$ Ved Lemma 34.4, siden K og L er normale i G, vet vi at $K \vee L = KL$, slik at $G = KL = LK$. Ved Teorem 34.5, får vi at $G/L = LK/K \cong L/(L \cap K) = L/\{e\} \cong L$. Her følger den første isomorfien fra det andre isomorfiteoremet, mens den andre er enten fra konstruksjonen av faktorgrupper. (Alternativt kan man se sistnevnte fra det første isomorfiteoremet brukt på identitshomomorfien $1\colon G \to G$, som er altså surjektiv og injektiv, slik at kjernen er e.)

Kapittel 36

$\boxed{12}$ Vi antar at G er en gruppe slik at $|G|$ deles av to forskjellige primtall p og q.

Anta at H er den eneste Sylow p-undergruppen av G. Siden q deler $|G|$, men ikke $|H|$, må $G \neq H$, så H er en ekte undergruppe. Siden p deler $|G|$, er H i følge første Sylowteorem heller ikke den trivielle undergruppen.

Siden H er den eneste undergruppen av sin orden (fordi H er den eneste Sylow p-undergruppen), så er i følge oppgave 14.34 (gitt på øving 6) H en normal undergruppe.

G inneholder dermed en ekte, ikke-triviell normal undergruppe, og er ikke simpel.

$\boxed{13}$ $|G| = 45 = 3^2 \cdot 5$

Siden denne oppgaven kommer rett etter oppgave 12, og ordenen til G oppfyller kravene i den oppgaven, mistenker vi at vi kan bruke resultatet derifra. Vi ser i tillegg at en Sylow 3-undergruppe av G vil ha orden 9, som er det oppgaven spør etter!

Fra tredje Sylowteorem vet vi at dersom n er antall Sylow 3-undergrupper, så vil $n \mid |G|$ og $n \equiv 1 \mod p$. Så for å finne antall Sylow 3-undergrupper sjekker vi divisorene av $|G|$:

Divisor av $\|G\|$	1	3	5	9	15	45
mod 3	1	0	2	0	0	0

Dermed kan det bare finnes én Sylow 3-undergruppe, det vil si kun en undergruppe av orden 9; så denne blir normal.

14 La $|G| < \infty$. Vi skal vise at $|G| = p^n \Leftrightarrow G$ er en p-gruppe.

"$\Rightarrow$" Anta at $|G| = p^n$, og la $g \in G$. Fra Lagranges teorem (10.10) vet vi at $|g| \mid |G|$. Dermed må $|g|$ være en potens av p. Siden dette gjelder for alle $g \in G$ er G en p-gruppe.

"$\Leftarrow$" Anta at G er en p-gruppe, og anta at $|G| \neq p^n$, det vil si at det eksisterer et primtall $q \neq p$ som deler $|G|$, for å komme fram til en selvmotsigelse. I følge teorem 36.3 må da G inneholde et element av orden q. q er åpenbart ikke en potensav p, så G kan ikke være en p-gruppe. Det følger at antagelsen må være gal, og $|G| = p^n$.

Eksamensoppgaver

K2007 - 6 Vi vet at et produkt av to polynomer, henholdsvis av grad m og n, over en kropp[1] er et polynom av grad $m + n$. Ut ifra det ser vi at enhetene i $\mathbb{Z}_5[x]$ er alle konstante polynomer unntatt 0.

Videre ser vi at $\mathbb{Z}_5[x]$ er et integritetsområde (ingen nulldivisorer), men ikke en kropp (alle polynomer av grad større en null mangler inverser).

V2007 - 4 **a)** La $I \subseteq R$ være et ideal i en kommuttativ ring, og anta at $a \in I$ er en enhet. Da har vi at $1 = a^{-1}a \in a^{-1}I = I$, og dermed har vi at for enhver $r \in R$, så er $r = r1 \in rI = I$, så $R = I$.

b) Kjernen til ϕ er et ideal i K.

Dersom $\ker \phi = \{0\}$ er ϕ 1-1, og vi er i mål.

Dersom $\ker \phi \neq \{0\}$, så finnes det et ikke-null element $a \in \ker \phi$. Da K er en kropp må a være en enhet. Dermed har vi fra (a) at $\ker \phi = K$, så *phi* er nullavbildningen.

[1] Strengt tatt er det nok med et integritetsområde

V2007 - 5

$$
\begin{aligned}
R &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} | x, y, z \in Z_2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Nulldivisorene er

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Enhetene er

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Dette er ikke en divisjonsring, da det finnes ikke-null elementer som ikke enheter.

H2006 - 7 Vi har p et primtall og $0 \leq a < p$ et heltall. Videre lar vi $q(x) \in \mathbb{Z}_p(x)$ være gitt ved $q(x) = x^p - a$. Fermats lille teorem forteller oss at $a^p \equiv a \mod p$. Dermed er a en rot av q, og siden Z_p er en kropp må da $(x - a)$ være en (lineær) faktor av $q(x)$.