Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4150
Vår 2016

Øving 8

Fra boka:
Seksjon 18: 15, 18, 37, 46
Seksjon 19: 1, 2, 12, 23, 29

Eksamensoppgaver
Eksamen Høst 2010, oppg 4
Eksamen Vår 2011, oppg 3
Eksamen Høst 2011, oppg 4

1 La $n \in \mathbb{Z}$ være et heltall (ikke nødvendigvis positivt!) og definer $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Vis at dette er en ring og at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] \subseteq \mathbb{C}$.

2 La $M_n(\mathbb{Z})$ være ringen av alle $n \times n$-matriser over $\mathbb{Z}$. Finn alle enhetene og nulldivisorene i $M_n(\mathbb{Z})$.
Hint: Determinant.

3

a) La R og S være to ringer med enhet. Vis at et element $(a, b) \in R \times S$ er enhet i $R \times S$ hvis og bare hvis a er enhet i R og b er enhet i S.

b) La m, n være to positive heltall med $\gcd(m, n) = 1$. Definer $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ved $f(a) = (a \mod m, a \mod n)$. Vis at f er en ringisomorfi.

c) Eulers phi-funksjon $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er definert ved at $\phi(n) = |\{a|1 \leq a \leq n, \gcd(a, n) = 1\}|$. Med andre ord, $\phi(n)$ er antall heltall mindre enn eller lik n som er relativt primisk til n. Vis at $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ når n og m er reltivt primiske.
*Hint:*Se på antall enheter i $\mathbb{Z}_{mn}$ og $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

4 En ikke-triviell ringhomomorfi $f : R \to S$ der R og S er ringer med enhet der $0_R \neq 1_R$ og $0_S \neq 1_S$, er en ringhomomorfi slik at $f(1_R) = 1_S$.

a) Vis at dersom $f : R \to S$ er en ikke-triviell ringhomomorfi, så er $f(0) = 0$ og $f(-1) = -1$.

b) Vis at den eneste ringhomomorfi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ er triviell.
Hint: Hva måte $f(i)$ være dersom f var ikketriviell?