



Fra boka:

Seksjon 18: 15, 18, 37, 46

Seksjon 19: 1, 2, 12, 23, 29

Eksamensoppgaver

Eksamen Høst 2010, oppg 4

Eksamen Vår 2011, oppg 3

Eksamen Høst 2011, oppg 4

- 1 La $n \in \mathbb{Z}$ være et heltall (ikke nødvendigvis positivt!) og definer $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Vis at dette er en ring og at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subseteq \mathbb{C}$.
- 2 La $M_n(\mathbb{Z})$ være ringen av alle $n \times n$ -matriser over \mathbb{Z} . Finn alle enhetene og nulldivisorene i $M_n(\mathbb{Z})$.
Hint: Determinant.
- 3
 - a) La R og S være to ringer med enhet. Vis at et element $(a, b) \in R \times S$ er enhet i $R \times S$ hvis og bare hvis a er enhet i R og b er enhet i S .
 - b) La m, n være to positive heltall med $\gcd(m, n) = 1$. Definer $f : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ved $f(a) = (a \bmod m, a \bmod n)$. Vis at f er en ringisomorfi.
 - c) Eulers phi-funksjon $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ er definert ved at $\phi(n) = |\{a \mid 1 \leq a \leq n, \gcd(a, n) = 1\}|$. Med andre ord, $\phi(n)$ er antall heltall mindre enn eller lik n som er relativt primisk til n . Vis at $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ når n og m er relativt primiske.
Hint: Se på antall enheter i \mathbb{Z}_{mn} og $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.
- 4 En ikke-triviell ringhomomorfi $f : R \rightarrow S$ der R og S er ringer med enhet der $0_R \neq 1_R$ og $0_S \neq 1_S$, er en ringhomomorfi slik at $f(1_R) = 1_S$.
 - a) Vis at dersom $f : R \rightarrow S$ er en ikke-triviell ringhomomorfi, så er $f(0) = 0$ og $f(-1) = -1$.
 - b) Vis at den eneste ringhomomorfi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ er triviell.
Hint: Hva blir $f(i)$?