Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen
Andrew Stacey, telefon (735) 90154

Bokmål versjon

TMA4145 Lineær metoder: kontinuasjon eksamen

Mandag 16. august 2010
Tid: 15:00–19:00
Hjelpemidler: Kode D
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S

Oppgave 1.

Svar på *fire* av de følgende oppgavene

i. Gi definisjonen av en kontinuerlig funksjon fra et metrisk rom til et annet.
ii. Hva mener vi når vi sier at et metrisk rom er *komplett*?
iii. Formuler rang teoremet.
iv. I $PA = LU$–faktoriseringen av en matrise, hvilke egenskaper har P, A, L, og U?
v. Gi definisjonen av en *ortonormal familie* i et indreproduktrom.
vi. Skriv ned *parallellogram identiteten* (som også heter parallellogram loven) for normen i et indreproduktrom.
vii. Gi definisjonen av L^2–normen på $C([0,1],\mathbb{C})$, rommet av komplekse kontinuerlig funksjoner på $[0,1]$.

(8 poeng)

Oppgave 2.

La $W \subseteq \mathbb{R}^5$ være underromet:

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{når} \quad \begin{array}{ccccccccccc} v & + & 3w & - & x & + & 3y & + & 5z & = 0, \\ 3v & + & 9w & - & 3x & + & 3y & + & 9z & = 0, \\ 2v & + & 6w & - & 2x & & & + & 4z & = 0, \\ v & + & 3w & - & x & - & 3y & - & z & = 0 \end{array} \right\}$$

Finn det punktet i W som ligger nærmest vektoren:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(8 poeng)

Oppgave 3.

La $\|\cdot\|_2$ være den Euklidske normen på $\mathbb{R}^2$. Definer en funksjon $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \begin{cases} \|\vec{x} - \vec{y}\|_2 & \text{hvis } \mu\vec{x} = \lambda\vec{y} \text{ med } \mu, \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2 & \text{hvis ikke.} \end{cases}$$

1. Vis at d definerer en metrikk på $\mathbb{R}^2$. *(4 poeng)*
2. Er det sant at d kommer fra et norm? Si hvorfor. *(2 poeng)*
3. La $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være identitetsfunksjonen. Er en av $I\colon (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, d)$ eller $I\colon (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ kontinuerlig? Si hvorfor. *(2 poeng)*

Oppgave 4.

La Poly_1 være rommet av polynomer som har reelle koeffisienter og grad høyst lik 1. Definer et indreprodukt på Poly_1 ved:

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Du kan anta at dette er et indreprodukt.

1. Definer en lineær funksjon $\mathrm{Poly}_1 \to \mathbb{R}$ ved $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$. Finn et polynom $r(t) \in \mathrm{Poly}_1$ slik at:
$$\langle p(t), r(t) \rangle = \int_0^1 p(t)dt$$
for alle polynomer $p(t) \in \mathrm{Poly}_1$. *(2 poeng)*
2. La $D\colon \mathrm{Poly}_1 \to \mathrm{Poly}_1$ være differensialfunksjonen: $(Dp)(t) = p'(t)$. Finn den *adjungerte* til D. Det betyr: finn funksjonen $D^*\colon \mathrm{Poly}_1 \to \mathrm{Poly}_1$ slik at:
$$\langle Dp(t), q(t) \rangle = \langle p(t), D^*q(t) \rangle$$
holder for alle $p(t), q(t) \in \mathrm{Poly}_1$. *(4 poeng)*
3. Finn et polynom $s(t) \in \mathrm{Poly}_1$ slik at for alle $p(t) \in \mathrm{Poly}_1$ har vi $\langle p(t), s(t) \rangle = \int_0^1 Dp(t)dt$. *(2 poeng)*

Oppgave 5.

La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.875 \end{bmatrix}$$

1. Forklar hvorfor A har en unik egenvektor i den positive kvadranten (i den første kvadranten) med lengde 1.

   Altså, at det eksisterer en unik vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med $x, y \geq 0$ og $x^2 + y^2 = 1$ som er en egenvektor til A.

   Merk: det er ikke nødvendig å finne vektoren. *(3 poeng)*
2. Vis at hvis $\vec{x}$ er en vektor som ligger i den positive kvadranten (det sier at begge to komponenter er positive tall) så er $A\vec{x}$ også i den positive kvadranten.

   Hva sier dette deg om egenverdien til A korresponderende til egenvektoren fra punkt 1? *(2 poeng)*
3. Forklar hvordan Banachs fikspunktteoremet kan brukes for å finne egenvektoren fra 1.

   Merk: Du skal i denne oppgaven kun sette opp problemet. Du trenger ikke å sjekke at alle betingelsene er oppfylt, men du bør forklare hva disse betingelsene er for dette tilfellet. Du bør også bemerke hvilke betingelser som allerede har blitt verifisert i de tidligere punktene.

   Dersom du fant egenvektoren når du svarte på del 1, skal du når late som om du ikke vet svaret. *(3 poeng)*