Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen
Andrew Stacey, telefon (735) 90154

Bokmål versjon

TMA4145 Lineær metoder

Torsdag 17. desember 2009
Tid: 09:00–13:00
Hjelpemidler: Kode D
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S

Oppgave 1.

Svar på **fire** av de følgende oppgavene.

i. Gi definisjonen av en metrisk funksjon på en mengde.
ii. Gi definisjonen av en følge i et metrisk rom som konverger.
iii. Formuler Banachs fikspunktteorem.
iv. Formuler spektralteoremet for endelig dimensjon.
v. Gi definisjonen av en omegn av et punkt i et metrisk rom.
vi. Formuler Cauchy–Schwarz ulikhet.
vii. I QR–faktoriseringen av en matrise, hvilke egenskaper har Q og R?

(8 poeng)

Oppgave 2.

La (M, d) være et metrisk rom.

1. La (x_n) være en følge i M som konvergerer mot et punkt $x \in M$. Vis at der er en delfølge (x_{n_k}) av (x_n) slik at $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ for alle $k \in \mathbb{N}$. *(2 poeng)*
2. La (x_n) være en følge i M som konvergerer mot et punkt $x \in M$. For alle n, la $(x_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ være en følge i M som konvergerer (som $m \to \infty$) mot x_n. Ved å bruke punkt 1 for hver av disse følgene, eller på en annen måte, vis at der er en følge (y_k) slik at
   (a) $(y_k) \to x$
   (b) for alle $k \in \mathbb{N}$, så eksisterer $n_k, m_k \in \mathbb{N}$ slik at $y_k = x_{n_k}^{m_k}$
   (c) n_k og m_k kan bli valgt slik at $n_k > n_{k-1}$ og $m_k > m_{k-1}$.

   (3 poeng)
3. La $A \subseteq M$ være en delmengde. Et akkumulasjonspunkt for A er et punkt $x \in M$ (ikke nødvendigvis et punkt i A) slik at det er en følge i A som konvergerer til x. Vis at hvis (x_n) er en følge av akkumulasjonspunkter av A som konvergerer i M så er også grenseverdien et akkumulasjonspunkt av A. *(2 poeng)*
4. For $(C([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, gjelder følgende:
   (a) Hver kontinuerlig funksjon er grenseverdien til en følge av stykkvis lineær funksjoner,
   (b) Hver stykkvis lineær lineær funksjon er grenseverdien til en følge av polynomer.

   For en kontinuerlig funksjon $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ og $\epsilon > 0$, forklar hvorfor der finnes et polynom p slik at $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ for alle $t \in [0,1]$. *(1 poeng)*

Oppgave 3.

En matrise A har QR–faktorisering:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Forklar hvorfor $A^\top A = R^\top R$ og skriv ned denne matrisen. *(2 poeng)*
2. Finn en ortonormal basis av $\mathbb{R}^3$ som er egenvektorer for $R^\top R$. *(3 poeng)*
3. Finn singulærverdi-dekomposisjonen av R og bruk så denne til å finne singulærverdi-dekomposisjonen av A. *(3 poeng)*

Oppgave 4.

La Poly_k være vektorrommet av polynomer som har komplekse koeffisienter og grad høyst lik k. Definer en funksjon $\mathrm{Poly}_3 \times \mathrm{Poly}_3 \to \mathbb{C}$ ved

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^{3} p(j)\overline{q(j)}$$

1. Vis at dette definerer et indreprodukt på Poly_3. *(3 poeng)*
2. Ved bruk av Gram–Schmidts algoritme, begynn med $\{1, t\}$ og finn en ortonormal basis for Poly_1, som et underrom av Poly_3. *(2 poeng)*
3. La $p \in \mathrm{Poly}_3$ være et polynom slik at $p(0) = -3$, $p(1) = 1$, $p(2) = 3$, og $p(3) = 3$. Finn den ortogonale projeksjonen av p på Poly_1 (med andre ord, finn det nærmeste punktet til p i underrommet Poly_1). *(2 poeng)*
4. Er $\deg p \leq 1$? *(1 poeng)*

Oppgave 5.

Newton–Raphson metoden for å finne røttene til en deriverbar funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved å iterere funksjonen

$$x \mapsto g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Vi antar følgende egenskaper for f:

i. f har kontinuerlig andre derivert,

ii. $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$,

iii. der er $0 < \alpha < 1$ slik at $|f(x)f''(x)| \leq \alpha |f'(x)|^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Vis at x^* er et fikspunkt til g hvis og bare hvis $f(x^*) = 0$. *(1 poeng)*
2. Vis at g er en kontraksjon. *(2 poeng)*

   Det kan være nyttig å huske på sekantsetningen, som sier at for en deriverbar funksjon, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og $x < y \in \mathbb{R}$ finnes $z \in (x, y)$ slik at

   $$h(y) - h(x) = (y - x)h'(z).$$

3. Fungerer denne metoden med $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$)? Hvis ikke, hvilke av betingelsene feiler? *(2 poeng)*
4. Denne metoden fungerer for polynomet $f(x) = x^3 + 3x + 1$ med $\alpha = 8/9$. La $x_0 = 0$. Ved bruk av estimatet $|x_n - x^*| \leq \alpha^n |x_0 - x_1|$, estimer hvor mange ledd som trengs for å vite at x_n avviker med høyst .01 fra x^*. *(1 poeng)*
5. Gjør 5 iterasjoner med $x_0 = 0$. Hva observerer du? *(2 poeng)*